

الواجب المنزلي رقم 02 في مادة الرياضيات

يُستلم يوم: 2025-11-18

سُلم يوم: 2025-11-13



التمرين الأول:

1/ نعتبر العددين الحقيقيين $a = 4\sqrt{2}$ و $b = 3\sqrt{5}$.

ا/ بين أن: $a - b = \frac{-13}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}$ ، ثم استنتج مقارنة بين a و b .

ب/ استنتج مقارنة بين: a^2 و b^2 ثم بين $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$.

ج/ أنشئ وبسط العدد: $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2$ ، ثم استنتج كتابة مبسطة للعدد: $A = \sqrt{77 - 24\sqrt{10}}$.

2/ لتكن x, y و z أعدادا حقيقية حيث: $4 \leq x \leq 6$ و $|y| \leq 3$ و $5 < \frac{-3z + 4}{2} < \frac{13}{2}$.

ا/ جد حصر العدد y ثم بين أن: $-3 < z < -2$.

ب/ عين حصر لـ $(z + 3)$ ثم استنتج مقارنة بين: $(z + 3)^{1447}$ و $(z + 3)^{2025}$.

ج/ عين حصر لـ $\left(\frac{2-z}{3}\right)$ ثم استنتج مقارنة بين: $\left(\frac{2-z}{3}\right)^{1447}$ و $\left(\frac{2-z}{3}\right)^{2025}$.

د/ جد حصر لكل من: $x^2 - 6$ • $\sqrt{y+7}$ • $\frac{x^2 - 6}{\sqrt{y+7}}$

التمرين الثاني:

1/ (Δ) المستقيم العددي المزود بمعلم $(O; I)$ و M نقطة من (Δ) فاصلتها العدد الحقيقي x .

لتكن النقط $A(-4)$ ، $B(-2)$ و $C(3)$. باستعمال مفهوم المسافة حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمترابحات التالية:

$ x + 4 \leq x - 3 $ و / $ x + 4 + x - 3 = 7$ ز	$ x - 1 \leq 2$ د / $\left \frac{1}{2}x + 2\right > 1$ هـ /	$ x - 2 = -1$ ا / $ -x - 2 = 3$ ب / $ -2x + 6 = 4$ ج /
---	--	---

2/ لتكن E العبارة ذات المتغير الحقيقي x التالية: $E = \frac{1}{2}|2x - 4| + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

ا/ بين أن $E = |x - 2| + |x + 1|$.

ب/ أحسب E من أجل $x = 2 - \sqrt{5}$ ثم من أجل $x = \sqrt{2}$.

ج/ أدرس إشارة كل من $(x + 1)$ و $(x - 2)$ حسب قيم x ، ثم أكتب E دون رمز القيمة المطلقة.

د/ حل جبريا في $\mathbb{R}$ المعادلات والمترابحات التالية: $E \leq x + 7$ • $E = 2$ • $E = 3$



التمرين الثالث:

1/ أتمم الجدول التالي، موضحاً طريقة الحساب:

صيغة الحصر	صيغة المجال	مركز المجال	نصف قطر المجال	صيغة المسافة	صيغة القيمة المطلقة
$-3 \leq x \leq 4$					
	$x \in]-9; 3[$				
		-2	6		
				$d(x, 0) \leq 2$	
					$ x + 3 < \frac{1}{2}$

2/ أتمم الجدول التالي: (استعمل اللون الأحمر للمجال I واللون الأزرق للمجال J)

المجال I	المجال J	تمثيل المجالين على المستقيم العددي	$I \cup J$	$I \cap J$
$[1; 5]$	$] -2; 3[$			
$[-3; +\infty[$	$] -5; 2]$			
$] -\infty; 1[$	$[1; 4[$			
$[1; 3[$	$] 1; 3]$			
$[2; 5[$	$] 0; 2]$			

بقول الإمام الشافعي - رحمه الله -:

شَكَوْتُ إِلَى وَكَيْعٍ سَوْءَ حِفْظِي ♦ ♦ ♦ أَرْشَدَنِي إِلَى تَرْكِ الْمَعَاصِي
وَأَخْبَرَنِي بِأَنَّ الْعِلْمَ نُورٌ ♦ ♦ ♦ وَنُورُ اللَّهِ لَا يُهْدَى لِعَاصِي

التمرين الأول: (قواعد الحصر والمقارنة والترتيب)



$$1/ \quad a = 4\sqrt{2} \quad \text{و} \quad b = 3\sqrt{5} .$$

$$/ \text{ تبيان أن: } a - b = \frac{-13}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad a - b &= 4\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = \frac{(4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}} \\ &= \frac{(4\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{5})^2}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}} = \frac{16 \times 2 - 9 \times 5}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}} \\ &= \frac{32 - 45}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}} = \frac{-13}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}} = a - b \end{aligned}$$

• استنتاج مقارنة بين a و b : لدينا: $a - b < 0$ ومنه: $a < b$

ب/ استنتاج مقارنة بين a^2 و b^2 :

لدينا: $a < b$ وبما أن كلا من a و b موجبان فإن: $a^2 < b^2$.
استنتاج مقارنة بين $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$:

لدينا: $a < b$ وبما أن كلا من a و b موجبان تماما فإن: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

ج/ النشر والتبسيط:

$$\begin{aligned} \bullet \quad (4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 &= (4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{5} \\ &= 16 \times 2 + 9 \times 5 - 24\sqrt{2} \times 3 = 32 + 45 - 24\sqrt{10} \\ &= 77 - 24\sqrt{10} = (4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

• استنتاج كتابة مبسطة للعدد $A = \sqrt{77 - 24\sqrt{10}}$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad A &= \sqrt{77 - 24\sqrt{10}} = \sqrt{(4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2} = |4\sqrt{2} - 3\sqrt{5}| \\ &= -(4\sqrt{2} - 3\sqrt{5}) = -4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = A \end{aligned}$$

(لأن العدد $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})$ سالب)

$$2/ \quad 4 \leq x \leq 6 \quad \text{و} \quad |y| \leq 3 \quad \text{و} \quad 5 < \frac{-3z + 4}{2} < \frac{13}{2} .$$

/ ا/ إيجاد حصر للعدد y : لدينا: $|y| \leq 3$ يكافئ: $-3 \leq y \leq 3$.

• تبيان أن: $-3 < z < -2$: لدينا: $5 < \frac{-3z + 4}{2} < \frac{13}{2}$

ومنه بالضرب في العدد 2 نجد: $10 < -3z + 4 < 13$

ومنه بإضافة العدد -4 نجد: $6 < -3z < 9$

ومنه بالضرب في العدد $-\frac{1}{3}$ نجد: $-\frac{1}{3} \times 6 > -\frac{1}{3}(-3z) > -\frac{1}{3} \times 9$

أي: $-3 < z < -2$.

ب/ تعيين حصر لـ: $(z + 3)$:

لدينا: $-3 < z < -2$ ومنه: $-3 + 3 < z + 3 < -2 + 3$ أي: $0 < z + 3 < 1$

• استنتاج مقارنة:

بما أن: $0 < (z + 3) < 1$ فإن: $(z + 3)^{2025} < (z + 3)^{1447} < (z + 3)$.

ج/ تعيين حصر لـ: $\left(\frac{2-z}{3}\right)$

لدينا: $-3 < z < -2$ ومنه: $2 < -z < 3$ ومنه: $2 + 2 < 2 - z < 3 + 2$

وبالتالي: $\frac{1}{3} \times 5 < \frac{1}{3} \times (2 - z) < \frac{1}{3} \times 4 < \frac{1}{3} \times 5$ أي: $\frac{4}{3} < \frac{2-z}{3} < \frac{5}{3}$

• استنتاج مقارنة: بما أن: $\frac{4}{3} < \frac{2-z}{3} < \frac{5}{3}$ و $\frac{4}{3} < \frac{2-z}{3}$ فإنه بالتعدي: $1 < \frac{2-z}{3}$

إذن: $\left(\frac{2-z}{3}\right) < \left(\frac{2-z}{3}\right)^{1447} < \left(\frac{2-z}{3}\right)^{2025}$

د/ تعيين حصر لـ: $(x^2 - 6)$:

لدينا: $4 \leq x \leq 6$ ومنه: $4^2 \leq x^2 \leq 6^2$ أي: $16 \leq x^2 \leq 36$

وبالتالي: $16 - 6 \leq x^2 - 6 \leq 36 - 6$ إذن: $10 \leq x^2 - 6 \leq 30$.

• تعيين حصر لـ: $\sqrt{y+7}$: لدينا: $-3 \leq y \leq 3$

ومنه: $-3 + 7 \leq y + 7 \leq 3 + 7$ أي: $4 \leq y + 7 \leq 10$

وبالتالي: $\sqrt{4} \leq \sqrt{y+7} \leq \sqrt{10}$ أي: $2 \leq \sqrt{y+7} \leq \sqrt{10}$

• تعيين حصر لـ: $\frac{x^2-6}{\sqrt{y+7}}$

لدينا مما سبق: $2 \leq \sqrt{y+7} \leq \sqrt{10}$ ومنه: $\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \frac{1}{\sqrt{y+7}} \leq \frac{1}{2}$

ولدينا: $10 \leq x^2 - 6 \leq 30$

وبالتالي: $10 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \leq (x^2 - 6) \times \frac{1}{\sqrt{y+7}} \leq 30 \times \frac{1}{2}$

إذن: $\sqrt{10} \leq \frac{x^2-6}{\sqrt{y+7}} \leq 15$



التمرين الثاني: (القيمة المطلقة، معادلات ومتراجحات)

(Δ) مستقيم عددي مزود بمعلم (O; I)

$M(x)$ ، $A(-4)$ ، $B(-2)$ و $C(3)$ نقط من (δ) حيث x عدد حقيقي.

1/ حل المعادلات والمتراجحات باستعمال مفهوم المسافة:

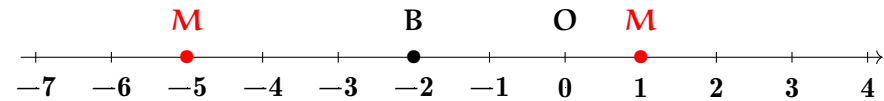
• المعادلة $|x-2| = -1$:

ليس لها حلول؛ لأن العدد -1 سالب تماما و من أجل كل عدد حقيقي x : $|x-2| \geq 0$

• المعادلة $|x-2| = 3$:

تكافئ: $|(x+2)| = 3$ تكافئ: $|x+2| = 3$ (لأن: $|-X| = |X|$)

تكافئ: $|x - (-2)| = 3$ معناه: $d(x; -2) = 3$ أي: $MB = 3$



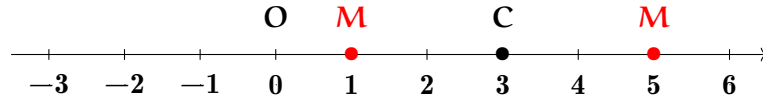
وبالتالي للنقطة M موضعين على المستقيم العددي، لما: $x = -5$ ولما $x = 1$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{-5; 1\}$

• المعادلة $|-2x+6| = 4$:

تكافئ: $|-2(x-3)| = 4$ تكافئ: $|-2| \times |x-3| = 4$ أي: $2|x-3| = 4$

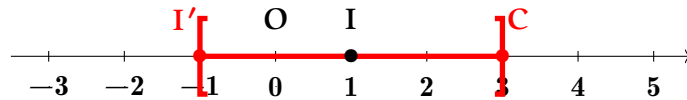
تكافئ: $|x-3| = 2$ معناه: $d(x; 3) = 2$ أي: $MC = 2$



وبالتالي للنقطة M موضعين على المستقيم العددي، لما: $x = 1$ ولما $x = 5$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1; 5\}$

• المتراجحة $|x-1| \leq 2$: معناه: $d(x; 1) \leq 2$ أي: $MI \leq 2$



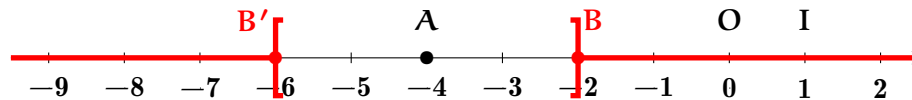
فمواضع النقطة M الممكنة هي جميع نقاط قطعة المستقيم $[I'C]$ حيث: $I'(-1)$ و $C(3)$

أي: $-1 \leq x \leq 3$. إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = [-1; 3]$

• المتراجحة $|\frac{1}{2}x+2| > 1$:

تكافئ: $|\frac{1}{2}(x+4)| > 1$ تكافئ: $|\frac{1}{2}| \times |x+4| > 1$ أي: $|\frac{1}{2}|x+4| > 1$

تكافئ: $|x - (-4)| > 2$ معناه: $d(x; -4) > 2$ أي: $MA > 2$



فمواضع النقطة M الممكنة هي جميع نقاط المستقيم العددي ما عدا نقاط قطعة المستقيم $[B'B]$

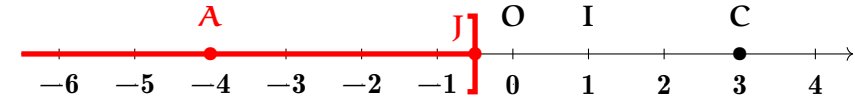
حيث: $B(-2)$ و $B'(-6)$ أي: $x < -6$ أو $x > -2$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S =]-\infty; -6[\cup]-2; +\infty[$.

● المتراجحة $|x+4| \leq |x-3|$

$$|x - (-4)| \leq |x - 3| \quad \text{تكافئ:}$$

معناه: $d(x; -4) \leq d(x; 3)$ أي: $MA \leq MC$.



فمواضع النقطة M الممكنة هي جميع نقاط نصف المستقيم [JA)،

حيث النقطة $J(-\frac{1}{2})$ منتصف القطعة [AC)، أي: $x \leq -\frac{1}{2}$.

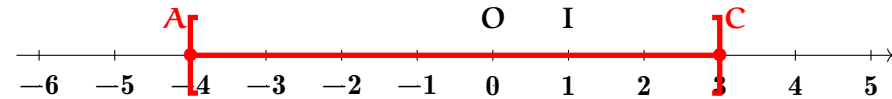


إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S =]-\infty; -\frac{1}{2}]$.

● المعادلة $|x+4| + |x-3| = 7$:

$$|x - (-4)| + |x - 3| = 7 \quad \text{تكافئ:}$$

معناه: $d(x; -4) + d(x; 3) = 7$ أي: $MA + MC = 7$.



فمواضع النقطة M الممكنة هي جميع نقاط قطعة المستقيم [AC)، أي: $-4 \leq x \leq 3$.

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = [-4; 3]$.

2/ / تبين أن $E = |x-2| + |x+1|$:

$$\begin{aligned} \bullet E &= \frac{1}{2} |2x-4| + \sqrt{x^2+2x+1} = \frac{1}{2} |2(x-2)| + \sqrt{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} |2| \cdot |x-2| + |x+1| = \frac{1}{2} \times 2 \times |x-2| + |x+1| \end{aligned}$$

$$E = |x-2| + |x+1|$$

ب/ حساب E من أجل $x = 2 - \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} \bullet E(2 - \sqrt{5}) &= |2 - \sqrt{5} - 2| + |2 - \sqrt{5} + 1| = |-\sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| \\ &= \sqrt{5} + (3 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 3 = E(2 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

حساب E من أجل $x = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \bullet E(\sqrt{2}) &= |\sqrt{2} - 2| + |\sqrt{2} + 1| = -(\sqrt{2} - 2) + (\sqrt{2} + 1) \\ &= -\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1 = 3 = E(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

ج/ دراسة الإشارة والكتابة دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{array}{ll} \text{لدينا: } x - 2 = 0 & \text{ولدينا: } x + 1 = 0 \\ \text{لما: } x = 2 & \text{لما: } x = -1 \end{array}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+
E	$(-x+2) + (-x-1) = -x+2-x-1 = -2x+1$ $E = -2x+1$	$(-x+2) + (x+1) = -x+2+x+1 = 3$ $E = 3$	$(x-2) + (x+1) = x-2+x+1 = 2x-1$ $E = 2x-1$	

$$E = \begin{cases} -2x+1 & ; \text{لما } x \in]-\infty; -1[\\ 3 & ; \text{لما } x \in [-1; 2] \\ 2x-1 & ; \text{لما } x \in]2; +\infty[\end{cases}$$

وبالتالي:

د/ حل المعادلات والمتراجحات جبرياً:

✓ المعادلة $E = 3$: نميز ثلاث حالات:

◀ لما: $x \in]-\infty; -1[$:

$$\text{فالمعادلة تكافئ: } -2x + 1 = 3 \quad \text{ومنه: } -2x = 3 - 1 \quad \text{إذن: } x = \frac{-2}{-2} = 1$$

وهو حل مرفوض لأنه لا ينتمي إلى المجال $]-\infty; -1[$.

◀ لما: $x \in [-1; 2]$: المعادلة محققة من أجل كل قيم x من هذا المجال. ($E = 3$)

◀ لما: $x \in]2; +\infty[$

فالمعادلة تكافئ: $2x - 1 = 3$ ومنه: $2x = 3 + 1$ إذن: $x = \frac{4}{2} = 2$.
وهو حل مرفوض لأنه لا ينتمي إلى المجال $]2; +\infty[$.

• نستنتج في الأخير أن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = [-1; 2]$.

✓ **المعادلة $E = 2$** : نميز ثلاث حالات:

◀ لما: $x \in]-\infty; -1[$

فالمعادلة تكافئ: $-2x + 1 = 2$ ومنه: $-2x = 2 - 1$ إذن: $x = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.
وهو حل مرفوض لأنه لا ينتمي إلى المجال $] -\infty; -1[$.

◀ لما: $x \in [-1; 2]$

المعادلة غير محققة من أجل كل قيم x من هذا المجال. ($E = 3 \neq 2$)

◀ لما: $x \in]2; +\infty[$

فالمعادلة تكافئ: $2x - 1 = 2$ ومنه: $2x = 2 + 1$ إذن: $x = \frac{3}{2} = 2$.
وهو حل مرفوض لأنه لا ينتمي إلى المجال $]2; +\infty[$.

• نستنتج أنه ليس للمعادلة حلول في $\mathbb{R}$ ، أي مجموعة الحلول هي: $S = \emptyset$.

✓ **المتراجحة $E \leq x + 7$** : نميز ثلاث حالات:

◀ لما: $x \in]-\infty; -1[$

فالمترابحة تكافئ: $-2x + 1 \leq x + 7$ ومنه: $-2x - x \leq 7 - 1$
أي: $-3x \leq 6$ وبالتالي: $x \geq -\frac{6}{3}$ أي: $x \geq -2$.

إذن نقبل فقط الحلول التي تنتمي إلى المجال $] -\infty; -1[$ ، أي مجموعة حلول المتراجحة

على هذا المجال هي: $S_1 = [-2; -1[$.

◀ لما: $x \in [-1; 2]$

فالمترابحة تكافئ: $3 \leq x + 7$ ومنه: $3 - 7 \leq x$ أي: $x \geq -4$.
إذن نقبل فقط الحلول التي تنتمي إلى المجال $[-1; 2]$ ، أي مجموعة حلول المتراجحة على هذا المجال هي: $S_2 = [-1; 2]$.

◀ لما: $x \in]2; +\infty[$

فالمترابحة تكافئ: $2x - 1 \leq x + 7$ ومنه: $2x - x \leq 7 + 1$ إذن: $x \leq 8$.
إذن نقبل فقط الحلول التي تنتمي إلى المجال $]2; +\infty[$ ، أي مجموعة حلول المتراجحة على هذا المجال هي: $S_3 =]2; 8]$.

• نستنتج في الأخير أن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

إذن: $S = [-2; 8]$.

التمرين الثالث: (الصيغ الأربعة، تقاطع واتحاد مجالين)

1/ إتمام الجدول التالي:

صيغة الحصر	صيغة المجال	المركز	ن. ق	صيغة المسافة	القيمة المطلقة
$-3 \leq x \leq 4$	$x \in [-3; 4]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$d\left(x; \frac{1}{2}\right) \leq \frac{7}{2}$	$\left x - \frac{1}{2}\right \leq \frac{7}{2}$
$-9 < x < 3$	$x \in]-9; 3[$	-3	6	$d(x; -3) < 6$	$ x + 3 < 6$
$-8 \leq x \leq 4$	$x \in [-8; 4]$	-2	6	$d(x; -2) \leq 6$	$ x + 2 \leq 6$
$-2 \leq x \leq 2$	$x \in [-2; 2]$	0	2	$d(x, 0) \leq 2$	$ x \leq 2$
$-\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}$	$x \in \left]-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right[$	-3	$\frac{1}{2}$	$d(x; -3) < \frac{1}{2}$	$ x + 3 < \frac{1}{2}$

المجال المغلق $[a; b]$ أو المفتوح: $]a; b[$

• مركزه: $c = \frac{a+b}{2}$ • نصف قطره: $r = \frac{b-a}{2}$

• حداه: $a = c - r$ و $b = c + r$



$I \cap J$	$I \cup J$	تمثيل المجالين على المستقيم العددي	المجال J	المجال I
$[1; 3[$	$] -2; 5]$		$] -2; 3[$	$[1; 5]$
$[-3; 2]$	$] -5; +\infty[$		$] -5; 2]$	$[-3; +\infty[$
ϕ	$] -\infty; 4[$		$[1; 4[$	$] -\infty; 1[$
$[1; 3[$	$[1; 3]$		$] 1; 3]$	$[1; 3[$
$\{2\}$	$] 0; 5[$		$] 0; 2]$	$[2; 5[$

◀ رُوِيَ عَنْ سَفِيَّانَ بْنِ سَعْدٍ الثَّوْرِيِّ أَنَّهُ قَالَ:
«أَوَّلُ الْعِلْمِ الصَّمْتُ، ثُمَّ الْإِسْتِمَاعُ لَهُ، ثُمَّ حِفْظُهُ، ثُمَّ الْعَمَلُ بِهِ، ثُمَّ نَشْرُهُ وَتَعْلِيمُهُ»

◀ وَ رُوِيَ عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ الْمُبَارَكِ أَنَّهُ قَالَ:
«أَوَّلُ الْعِلْمِ النِّيَّةُ، ثُمَّ الْإِسْتِمَاعُ، ثُمَّ الْفَهْمُ، ثُمَّ الْحِفْظُ، ثُمَّ الْعَمَلُ، ثُمَّ النُّشْرُ»



رابط الموضوع مع الإجابة النموذجية للواجب المنزلي رقم 02 (01- ج م ع تك)

