

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(1; -1; 2)$ والمستوي (P) ذا المعادلة $x - y + z + 2 = 0$ والمستقيم (D) المعرف بـ:

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

- (1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .
- (2) جد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A ويوازي (P) .
- (3) أثبت أن (D) يقطع (P') في النقطة $A'(6; 3; 1)$.
- (4) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي (P) ويقطع (D) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}, \quad \text{و } v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}.$$

- (1) أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.
ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.
- (2) أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n .
ب) أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C التي لاحتقاتها: $z_A = 2-2i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، و $z_C = -2$

(1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

(2) عيّن z_D لاحقة النّقطة D حتى تكون النّقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

(3) (Γ) مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$

تحقق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

(4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أنّ الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانياً.

(2) احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب.

(3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

(5) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية

المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(7) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

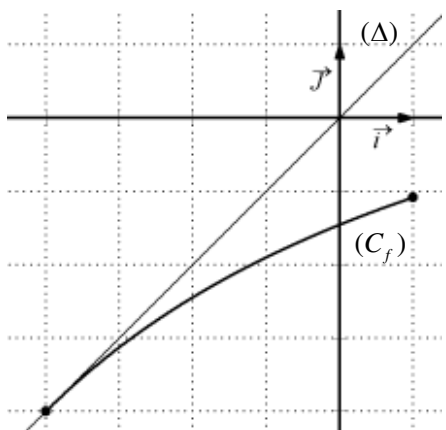
$$(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$.
- 1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا، ثم تحقق أن: $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) .
 - 2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل المبدأ O .
 - 3) جد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .
 - 4) بين أن (BH) عمودي على (AC) ، ثم استنتج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

التمرين الثاني: (04 نقاط)



- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$ الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي:
- وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$
- I) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ ثم بين أن:
- من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$

II) (u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) انقل الشكل المقابل ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$

ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$.

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم احسب المجموع S حيث

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

(1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$.

(2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2) \times (\bar{z}+2) = |z+2|^2$.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$.

(4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9.

(5) من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$

فإن: $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة، ثم احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ ، $\mathbb{R}$ من أجل كل x ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) اكتب معادلة L (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ ، $h(x) \geq 0$ ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

(2) $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

(3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

(4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

الموضوع —————

التمرين الأول: (04 نقاط)

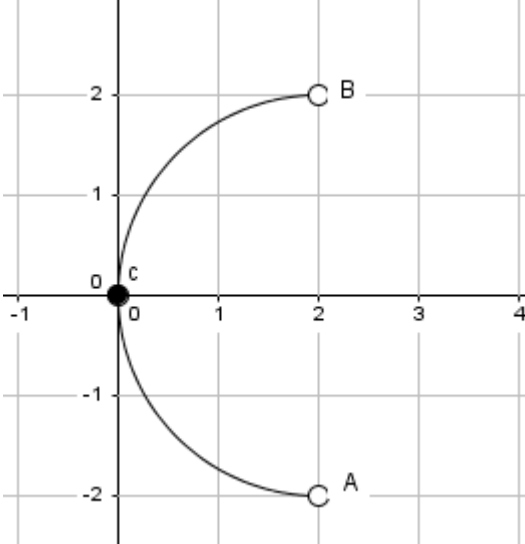
01	01	(1) التمثيل الوسيطى للمستقيم (D) . $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\begin{cases} x = -\lambda + 9 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda + 4 \end{cases}$
01	01	(2) معادلة (P') الذي يشمل A ويوازي (P) . $x - y + z - 4 = 0$
01	01	(3) أثبات أن (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$.
01	01	(4) التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 4t - 1 \\ z = -t + 2 \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ ومنه $(\Delta) = (AA')$ $\begin{cases} (D) \cap (P') \cap (\Delta) = \{A'\} \\ A \in (\Delta) \end{cases}$

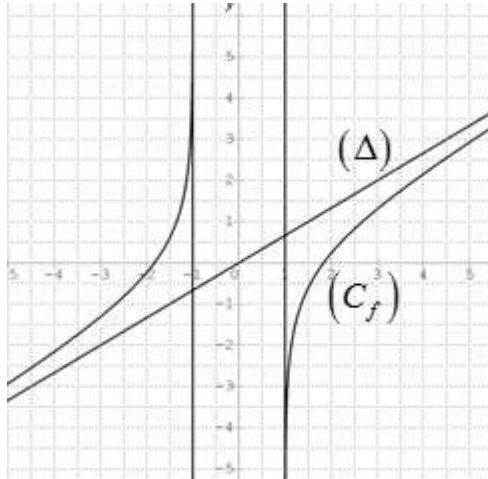
التمرين الثاني: (04 نقاط)

01	01	(1) أ) البرهان بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.
01	0.75 0.25	ب) - بيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4} > 0$ - بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة
01	0.50 0.25 0.25	(2) أ) بيان أن: $v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ $v_0 = 3$ عبارة حدّها العام: $v_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^n$
01	0.50 0.50	ب) إثبات أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ استنتاج النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

01	0.25 0.75	(I) $\Delta = -16$ حل المعادلة: $S = \{-2; 2 - 2i; 2 + 2i\}$.
0.50	2×0.25	(1) الشكل الأسي: $z_A = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
01	01	(2) $z_D = 6 + 8i$
	0.25	(3) التحقّق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ)

1.25	0.25 0.50 0.25	(Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$ منه (Γ) هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها A و B وقطرها $[AB]$ وتشمل O إنشاء (Γ): 
1.25	0.50 0.25 0.50	4) العبارة المركبة للتحاكي h هي: $z' = 2z + 2$ المجموعة (Γ') هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها النقطتين A' و B' والتي تشمل ذات اللاحقة 2 حيث $z_{B'} = 6 + 4i$; $z_{A'} = 6 - 4i$
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
0.75	0.50 0.25	1) بيان أن الدالة f فردية التفسير البياني: المبدأ O مركز تناظر للمنحني (C_f)
1.50	0.25×4 2×0.25	2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ من النهايات السابقة نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب معادلتيهما $x = -1$; $x = 1$
	0.50	3) أ) بيان أن من أجل كل x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)$

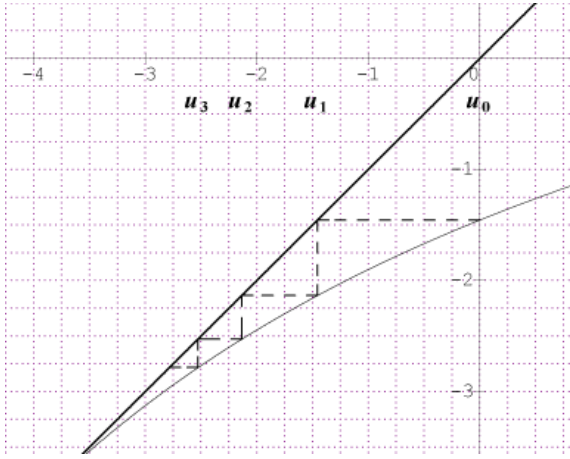
1.25	0.25	ب) اتجاه تغيّر الدالة f : f متزايدة تماما على كل مجال من D جدول تغيّراتها <table> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>+</td> <td></td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$-\infty \nearrow +\infty$</td> <td></td> <td></td> <td>$-\infty \nearrow +\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	$f'(x)$	+			+	$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow +\infty$
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$													
$f'(x)$	+			+													
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow +\infty$													
0.75	0.75	(4) بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,8 < \alpha < 1,9$.															
01	0.50	(5) (Δ) مقارب مائل لأن : $\lim_{ x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{ x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0$ الوضع النسبي: (C_f) فوق (Δ) من اجل $x < -1$ و (C_f) تحت (Δ) من اجل $x > 1$															
0.75	0.75	(6) انشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . 															
01	0.25	(7) $f(x) = m x$ تكافئ $(2 - 3 m)x + 3\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0$															
01	0.25	حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m x$															
	2×0.25	إذا كان $m \in \left] -\infty; -\frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty \right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول إذا كان $m \in \left] -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين															

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1.25	0.50 0.75	(1) بيان أنَّ النقط A, B, C تعين مستويا للتحقق أنَّ: $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) يكفي التأكد ان إحداثيات النقط A, B, C تحقق المعادلة المعطاة
0.50	0.50	(2) التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$
01	01	(3) إحداثيات H : $H\left(\frac{12}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49}\right)$
1.25	0.50 0.75	(4) اثبات أنَّ: $\vec{AC} \cdot \vec{BH} = 0$ نقطة تلاقي الاعمدة: يكفي اثبات $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ او $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

0.75	0.25 0.50	(I) التحقق أنَّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ اثبات ان: من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإنَّ $f(x) \in [-4; 1]$
01	0.50 2×0.25	(II) (1) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل الفواصل  التخمين: (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة
1.25	0.75 0.50	(2) البرهان بالتراجع أنَّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$ بيان أنَّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)^2}{u_n + 1} < 0$
01	0.50 0.50	(3) اثبات أنَّ: (v_n) حسابية : $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{7}$ حساب المجموع : $S = -1161792$

التمرين الثالث: (05 نقاط)																	
01	0.25 0.75	(1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$ (صحيحة)															
01	0.25 0.75	من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2) \times (\bar{z}+2) = z+2 ^2$ (صحيحة)															
01	0.25 0.75	(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$ (خاطئة)															
01	0.25 0.75	(4) صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9 (صحيحة)															
01	0.25 0.75	(5) من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$ فإن: $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$ (صحيحة)															
التمرين الرابع: (07 نقاط)																	
01	0.50 0.25 0.25	(1) بيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ التفسير هندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = 2$ حساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$															
1.50	0.50 0.50	(2) أ) بيان أن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$. ب) اتجاه تغير الدالة f : الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0; 2]$ جدول التغيرات:															
	0.50	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$f(2)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	$f'(x)$	+	0	-	0	+	$f(x)$	$-\infty$	0	$f(2)$
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$													
$f'(x)$	+	0	-	0	+												
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(2)$	$+\infty$													
0.50	0.50	(3) معادلة المماس $(T): y = -x + 2$															

1.25	0.50	(II) 1) تبين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x) \geq 0$. <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$h'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$h(x)$</td> <td colspan="3"> </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	$h'(x)$	-	0	+	$h(x)$			
	x	$-\infty$	1	$+\infty$										
	$h'(x)$	-	0	+										
$h(x)$														
0.25														
0.50		دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T). $f(x) - y = xh(x)$ (C_f) فوق (T) على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ ، (C_f) تحت (T) على $]-\infty;0[$ (C_f) يقطع (T) في النقطتين $A(1;1); B(0;2)$												
0.75	0.75	1) بيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,6 < \alpha < -0,7$. وذلك بواسطة مبرهنة القيم المتوسطة ورتابة الدالة												
01	0.25	2) انشاء المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.												
	0.75													
01	0.50	التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$												
	0.50	حساب المساحة $u.a$ $S = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = (7 - 2e)$												