

التمرين الأول (4ن):

- A ، B و C ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة.
ليكن G_α مرجح الجملة المنقلة: $\{(A; 2\alpha); (B; \alpha + 1); (C; \alpha + 3)\}$ ، حيث: α عدد حقيقي.
(1) عيّني قيمة α والتي من أجلها تكون النقطة G_α موجودة ووحيدة. (1ن).
(2) عيّني قيمة α حتى يكون الشعاع $\vec{u}$ ثابتاً،
حيث: $\vec{u} = 2\alpha\vec{MA} + (\alpha + 1)\vec{MB} + (\alpha + 3)\vec{MC}$. (1ن).
(3) نفرض أن $\alpha \neq -1$:
أ- عيّني إحداثيتي النقطة G_α في المعلم $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$. (1ن).
ب- ما هو المحل الهندسي للنقط G_α لما α يسمح $\mathbb{R} - \{-1\}$ ؟ (1ن).

التمرين الثاني (8ن):

- $ABCD$ مربع طول ضلعه $2cm$ ، لتكن I ، J منتصفا $[AB]$ و $[DC]$ على الترتيب.
(1) بيّني أن: $2\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD}$ مستقل عن M . (1.5ن).
(2) أ- بسطي العبارة: $2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + 2\vec{MD}$ بإستعمال مرجح الجملة:
 $\{(A; 2); (B; 2); (C; 2); (D; 2)\}$. (2ن).
ب- عيّني (Γ) مجموعة النقط M بحيث: (2ن).
 $\|2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + 2\vec{MD}\| = \|2\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD}\|$
ج- بيّني أن I و J تنتميان إلى (Γ) . (1.5ن).
د- أنشئي (Γ) . (1ن).

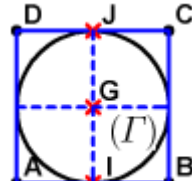
التمرين الثالث (8ن): (الجزء I) والجزء II مستقلان

- I المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
نعتبر النقطتين $A(0; 5)$ ، $B(3; 2)$ و G مرجح الجملة المنقلة: $\{(A; 1); (B; 2)\}$.
(1) علّمي النقط A و B . (0.5ن+0.5ن).
(2) أحسبي إحداثيتي النقطة G ثم أنشئها. (1ن+1ن+0.5ن).
(3) عيّني (Δ) مجموعة النقط M ثم أنشئها بحيث: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 6$. (2.5ن).
II لتكن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC ، بيّني أن: $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$ ، حيث: A' منتصف الضلع $[BC]$. (2ن).

ملاحظات هامة جداً:

- (1) يُمنع منعاً باتاً التشطيب و الكتابة تكون إما بالأزرق أو الأسود كما يُمنع الكتابة بقلم الرصاص.
(2) لا تكتبي ولا تُلطخي هذه الورقة لأنك سترجعها مع ورقة الإجابة.
(3) يُمنع إستعمال الآلة الحاسبة ذات الشاشة التي يزيد عرضها عن $2cm$.

العلامة	الإجابة النموذجية
(4ن)	التمرين الأول: A, B و C ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة. ليكن G_α مرجح الجملة المثقلة: $\{(A; 2\alpha); (B; \alpha + 1); (C; \alpha + 3)\}$ ، حيث: α عدد حقيقي.
0.5 0.25 0.25	(1) تعيين قيمة α والتي من أجلها تكون النقطة G_α موجودة ووحيدة: (النقطة G_α موجودة ووحيدة) إذا وفقط إذا كان $(2\alpha + \alpha + 1 + \alpha + 3 \neq 0)$. ومن: $4\alpha + 4 \neq 0$ ، أي: $\alpha \neq -\frac{4}{4}$ ، ومنه: $\alpha \neq -1$. إذن: $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
0.25 0.25 0.5	(2) تعيين قيمة α حتى يكون الشعاع $\vec{u}$ ثابتاً، حيث: $\vec{u} = 2\alpha\vec{MA} + (\alpha + 1)\vec{MB} + (\alpha + 3)\vec{MC}$ لدينا: حسب العلاقة الشعاعية لـ "لايبنتز" = "La Fonction vectorielle de Leibniz": $\vec{u} = 2\alpha\vec{MA} + (\alpha + 1)\vec{MB} + (\alpha + 3)\vec{MC} = (2\alpha + \alpha + 1 + \alpha + 3)\vec{MG}$ يكون الشعاع $\vec{u}$ ثابتاً إذا وفقط إذا كان غير متعلق بالنقطة M ، وهذا يكافئ أن: $4\alpha + 4 = 0$ ، أي: $\alpha = -1$. إذن: من أجل $\alpha = -1$ يكون الشعاع $\vec{u}$ ثابتاً.
0.25 0.25x2	(3) نفرض أن $\alpha \neq -1$: أ- تعيين إحداثيتي النقطة G_α في المعلم $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$: بما أن G_α مرجح الجملة المثقلة: $\{(A; 2\alpha); (B; \alpha + 1); (C; \alpha + 3)\}$ ، فإن: G_α يحقق: $2\alpha\vec{AG}_\alpha + (\alpha + 1)\vec{BG}_\alpha + (\alpha + 3)\vec{CG}_\alpha = \vec{0}$ وحسب علاقة "شال" = "la relation de Chasles" ، فإن: $2\alpha\vec{AG}_\alpha + (\alpha + 1)(\vec{BA} + \vec{AG}_\alpha) + (\alpha + 3)(\vec{CA} + \vec{AG}_\alpha) = \vec{0}$ $2\alpha\vec{AG}_\alpha + (\alpha + 1)\vec{BA} + (\alpha + 1)\vec{AG}_\alpha + (\alpha + 3)\vec{CA} + (\alpha + 3)\vec{AG}_\alpha = \vec{0}$ $(4\alpha + 4)\vec{AG}_\alpha + (\alpha + 1)\vec{BA} + (\alpha + 3)\vec{CA} = \vec{0}$ ، وبما أن $\alpha \neq -1$ ، فإن: $\vec{AG}_\alpha = -\frac{(\alpha+1)}{4(\alpha+1)}\vec{BA} - \frac{(\alpha+3)}{4(\alpha+1)}\vec{CA}$ ، ونعلم أن: $-\vec{BA} = \vec{AB}$ و $-\vec{CA} = \vec{AC}$ ومن: $\vec{AG}_\alpha = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{(\alpha+3)}{4(\alpha+1)}\vec{AC}$. إذن: $G_\alpha \left(\frac{1}{4}; \frac{\alpha+3}{4\alpha+4} \right); \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ في المعلم $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.
0.25 0.25	ب- ما هو المحل الهندسي للنقط G_α لما α يسمح $\mathbb{R} - \{-1\}$؟ حسب السؤال -أ- فإن: $\begin{cases} x_{G_\alpha} = x = \frac{1}{4} \\ y_{G_\alpha} = y = \frac{\alpha+3}{4\alpha+4} \end{cases}$ وبما أن: $y = \frac{\alpha+3}{4\alpha+4}$ ، فإن: $\alpha + 3 = y(4\alpha + 4) = 4\alpha y + 4y$ ، ومنه: $\alpha - 4\alpha y = 4y - 3$. أي: $\alpha(1 - 4y) = 4y - 3$ ، ومنه: $\alpha = \frac{4y-3}{1-4y}$ ، حيث: $y \neq \frac{1}{4}$.

0.25x2	وَعَلَيْهِ فَإِنَّ مَجْمُوعَةَ النُّقْطِ $M(x; y)$ لِمَا α يُمْسَح $\mathbb{R} - \{-1\}$ هِيَ الْمُسْتَقِيم (Δ) ذُو الْمَعَادِلَةِ $x = \frac{1}{4}$ مَاعِدَا النُّقْطَةِ $D\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.
(8ن)	التمرين الثاني: $ABCD$ مربع طول ضلعه 2cm. (1) <u>إثبات أن: $2\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD}$ مستقل عن M</u>: نضع: $\vec{v} = 2\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD}$ ، وَمِنْهُ: $\vec{v} = 2(\vec{MA} - \vec{MB}) + 2(\vec{MD} - \vec{MC})$ وَحَسَبَ عِلَاقَةَ "شَال" = "la relation de Chasles" ، فَإِنَّ: $\vec{v} = 2(\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AB}) + 2(\vec{MD} - \vec{MD} - \vec{DC})$ أي: $\vec{v} = -2(\vec{AB} + \vec{DC})$ ، وَبِمَا أَنَّ $ABCD$ مربع ، فَإِنَّ: $\vec{AB} = \vec{DC}$ (متوازي أضلاع خاص). وَمِنْهُ: $\vec{v} = -2(\vec{AB} + \vec{AB}) = -2 \times 2\vec{AB}$. إِذَنْ: $\vec{v} = -4\vec{AB}$. (وَهُوَ مُسْتَقِلٌّ عَنِ النُّقْطَةِ M).
0.25x2	(2) أ- <u>تبسيط العبارة: $2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + 2\vec{MD}$ باستعمال مرجح الجملة:</u> $\{(A; 2); (B; 2); (C; 2); (D; 2)\}$ لِيَكُن G مَرْجَحُ الْجُمْلَةِ الْمُثْقَلَةِ $\{(A; 2); (B; 2); (C; 2); (D; 2)\}$ ، حَيْثُ: $\alpha + \beta + \gamma + \lambda = 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \neq 0$ ، مِمَّا يَعْنِي أَنَّ G مَوْجُودٌ وَوَحِيدٌ. وَحَسَبَ الْعِلَاقَةَ الشَّعَاعِيَّةَ لـ "لايبنتز" = "La Fonction vectorielle de Leibniz" : $2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + 2\vec{MD} = (2 + 2 + 2 + 2)\vec{MG}$ إِذَنْ: $2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + 2\vec{MD} = 8\vec{MG}$
0.25x2	ب- <u>تعيين (Γ) مجموعة النقط M بحيث:</u> $\ 2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + 2\vec{MD}\ = \ 2\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD}\$ حَسَبَ السُّؤَالِ الْأَوَّلِ ، فَإِنَّ: $2\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD} = -4\vec{AB}$ وَحَسَبَ السُّؤَالِ أ- فَإِنَّ: $2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + 2\vec{MD} = 8\vec{MG}$ وَمِنْهُ: $(\Gamma): \ 8\vec{MG}\ = \ -4\vec{AB}\ = -4 \times \ \vec{AB}\ = 4AB$ أَي: $8MG = 4AB$ ، مَعْنَاهُ أَنَّ: $MG = \frac{4AB}{8} = \frac{4 \times 2}{2} = 1$ (لأن: $AB = 2\text{cm}$) إِذَنْ: $(\Gamma): MG = 1$ ، وَمَجْمُوعَةُ النُّقْطِ M هِيَ الدَّائِرَةُ ذَاتُ الْمَرْكَزِ G وَالنِّصْفِ الْقَطْرِ $r = 1\text{cm}$
0.5+0.25	ج- <u>إثبات أن I و J تنتميان إلى (Γ)</u>: نَعْلَمُ أَنَّ I مُنْتَصِفُ $[AB]$ وَ J مُنْتَصِفُ $[DC]$. وَبِمَا أَنَّ: $IG = JG$ وَ $IG = \frac{AB}{2}$ ، إِذَنْ: I وَ J تَنْتَمِيَانِ إِلَى (Γ).
0.5+0.25	د- <u>إنشاء (Γ)</u>:
0.25	

التمرين الثالث:

(ن8)

(I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
نعتبر النقطتين $A(0; 5)$ ، $B(3; 2)$ و G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A; 1); (B; 2)\}$.
(1) تعليم النقط A و B : (في الشكل أدناه).

0.5x2

(2) حساب إحداثيتي النقطة G :

نلاحظ أن: $\alpha + \beta = 1 + 2 = 3 \neq 0$. ومنه: G موجود ووحيد، حيث:

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} = \frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1 + 2} = \frac{6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} = \frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3 \end{cases} \text{ إذن: } G(2; 3).$$

0.25

1

1

0.25

*الإنشاء: (في الشكل أدناه).

(3) تعيين (Δ) مجموعة النقط M بحيث: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 6$:

حسب العلاقة الشعاعية لـ "لايبنتز" $"La Fonction vectorielle de Leibniz"$ ، فإن:

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} = (1 + 2)\vec{MG} = 3\vec{MG}$$

$$\text{ومنه: } \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|3\vec{MG}\| = 3MG = 6 \text{، أي: } MG = \frac{6}{3} = 2$$

إذن: $MG = 2$ (Δ). وتكون مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها

0.5

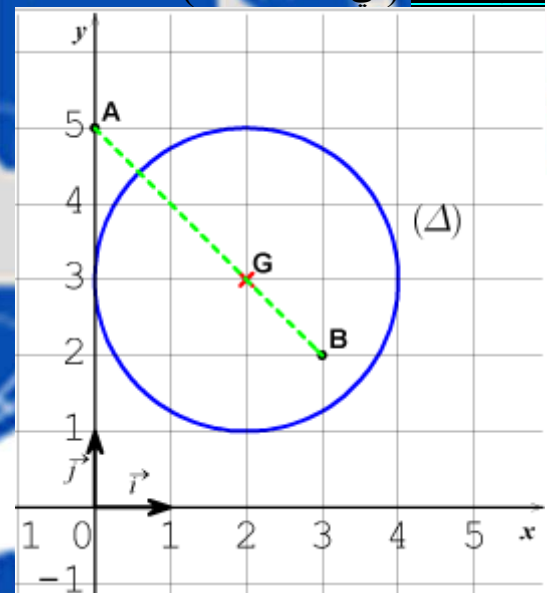
0.5

1

0.5

$$r = 2cm$$

*الإنشاء: (في الشكل أدناه)



(II) لتكن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

إثبات أن: $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$ ، حيث: A' منتصف الضلع $[BC]$:

0.5

(G مركز ثقل المثلث ABC) تكافئ (G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$)
وبما أن: $\alpha + \beta + \gamma = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$. ومنه: G موجود ووحيد.

من جهة أخرى، A' منتصف الضلع $[BC]$ ، وهذا يكافئ أن: A' مرجح الجملة المثقلة

0.5

$\{(A; 1); (B; 1)\}$ ونحقق: $\vec{BA'} = \vec{A'C}$. ومنه، وحسب خاصية التجميع، فإن:

0.5	$\left\{ (A; 1); \underbrace{(B; 1); (C; 1)}_{\text{مرجح الجملة } A'} \right\}$
0.5	(طبعًا: A' موجودة ووحيدة لأن: $\beta + \gamma = 1 + 1 = 2 \neq 0$). فتكون عندئذ: G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1); (A'; 2)\}$، وَتُحَقَّق: $\vec{AG} = \frac{2}{1+2} \vec{AA'}$. إذن: $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'}$.

الصفحة 4 من 4