

# اختبار

## الفصل الثاني



### تمرين 1 (5 نقاط)

$$(u_n) \text{ و } (v_n) \text{ المتتاليتان العدديتان المعرفتان على } \mathbb{N} \text{ بـ: } \begin{cases} u_0 = \frac{7}{10} \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + v_n}{5} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = \frac{1}{10} \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، نضع:  $w_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ .

(1) أ) برهن أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{5}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول  $w_0$ .

ب) اكتب عبارة الحد العام  $w_n$  بدلالة  $n$ ، ثم احسب نهاية  $w_n$ .

(2) أ) يبين أن المتتالية  $(v_n)$  متزايدة تماما والمتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

ب) يبين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، نضع:  $t_n = 2u_n + v_n$ . يبين أن المتتالية  $(t_n)$  ثابتة، احسب قيمتها ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(4) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، نضع:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و  $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

احسب بدلالة  $n$ :  $S_n - S'_n$  و  $2S_n + S'_n$ ، ثم استنتج حساب المجموعين:  $S_n$  و  $S'_n$ .

### تمرين 2 (4 نقاط)

يحتوي كيس  $U_1$  على 4 كريات سوداء،  $n$  كرية حمراء ( $n \geq 3$ ) وكرية واحدة خضراء (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس)

(1) نسحب كرتين في آن واحد بطريقة عشوائية، ونعتبر الأحداث التالية:  $A$ : سحب كرتين من نفس اللون.

$B$ : سحب كرتين من لونين مختلفين.  $C$ : سحب كرية حمراء على الأقل.

يبن أن احتمال الحدث  $A$  يساوي  $\frac{n^2 - n + 12}{n^2 + 9n + 20}$ ، ثم احسب  $p(B)$ ،  $p(C)$  و  $p(B \cup C)$ .

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين عدد الكريات السوداء المتحصل عليها.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ ، واحسب  $E(X)$  الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$ .

(3) نسحب من هذا الكيس كرتين على التوالي بدون إرجاع. احسب احتمال أن تكون الكرية الأولى المسحوبة حمراء.

(4) يحتوي كيس  $U_2$  على كرية واحدة سوداء وكرية واحدة حمراء، مشابهة لكرات الكيس الأول.

نسحب من الكيس  $U_1$  كرتين سوداوين وكرتين حمراوين ثم نضعها في الكيس  $U_2$ . نختار عشوائيا أحد الكيسين ونسحب

منه كرية واحدة. نعتبر الأحداث التالية:  $N$ : سحب كرية سوداء.  $R$ : سحب كرية حمراء.  $V$ : سحب كرية خضراء.

أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه العملية.

ب) عين قيمة  $n$  التي من أجلها احتمال سحب كرية من الكيس  $U_2$  علما أنّها حمراء يساوي  $\frac{2}{5}$ .

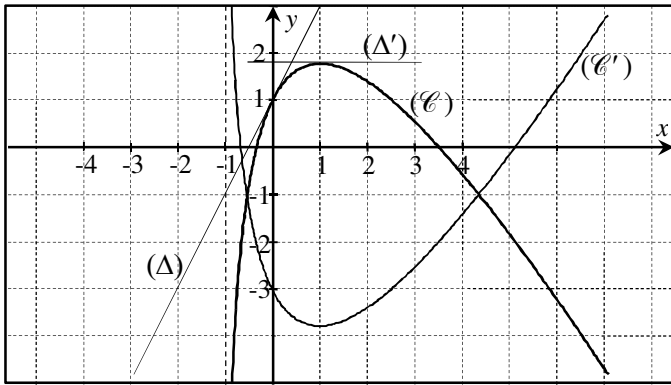
### تمرين 3 (4 نقاط)

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة مما يلي مع التبرير.

| الاقتراح (ج)                   | الاقتراح (ب)                             | الاقتراح (أ)           |                                                                                                                                           |
|--------------------------------|------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| لا يقبل نقطة انعطاف            | يقبل نقطتي انعطاف                        | يقبل نقطة انعطاف واحدة | 1 المنحني الممثل للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$                                           |
| $C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ | $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ | $A(-1; 0)$             | 2 المنحني الممثل للدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ بـ: $g(x) = x + \ln\left 1 - \frac{1}{x}\right $ يقبل كمركز تناظر النقطة: |
| $\frac{4}{3\ln 3}$             | $\frac{8}{3\ln 3}$                       | $\frac{8}{3}$          | 3 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 3^{-x} + 3^x$ القيمة المتوسطة لـ $h$ على المجال $[0; 1]$ هي:                                |
| $[0; \log 5]$                  | $[0; \ln 5]$                             | $[1; 5]$               | 4 مجموعة حلول المتراجحة $5 \times 10^{-x} \leq 6 - 10^x$ ، في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي المجال:                             |

### تمرين 4 (7 نقاط)

I- الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = ax + b + c \ln(x+1)$  ، حيث  $a, b, c$  ثلاثة أعداد حقيقية.



ليكن  $(\mathcal{C})$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  المبين في الشكل المقابل. المستقيم  $(\Delta)$  هو المماس للمنحني  $(\mathcal{C})$  عند  $x_0 = 0$  ، والمستقيم  $(\Delta')$  هو المماس الأفقي لـ  $(\mathcal{C})$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0 = 1$ . باستعمال القراءة البيانية: عَيِّن قيم الأعداد التالية:  $f'(0)$  و  $f(0)$  ،  $f'(1)$  و  $f(1)$ . استنتج قيم الأعداد الحقيقية  $a, b, c$ .

3 هل  $(\mathcal{C}')$  هو التمثيل البياني لـ:  $(-f)$  ،  $(-f+2)$  أو  $(-f-2)$  ؟ برّر إجابتك.

II- نفرض أنّ عبارة الدالة  $f$  هي:  $f(x) = -2x + 1 + 4 \ln(x+1)$ .

1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ، فسّر النتيجة بيانيا، ثم بيّن أنّ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

2 احسب  $f'(x)$  ، ادرس إشارتها ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

3 بيّن أنّ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-1; +\infty[$  ] يطلب حصره بعددين طبيعيين متتابعين.

4 هل المنحني  $(\mathcal{C})$  يقبل مماسا ميله  $-2$  ؟ علّل إجابتك.

5 عَيِّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تقبل المعادلة  $2 \ln(x+1) = x + m$  حلين موجبين تماما.

6 أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب  $I = \int_0^2 \ln(x+1) dx$ . (لاحظ أنّ  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ )

ب) احسب مساحة الحيز المحدّد بالمنحني  $(\mathcal{C})$  حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهم  $x=0$  و  $x=2$ .

III- نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $h(x) = -2|x| + 1 + 4 \ln(|x| + 1)$ .

1 أ) بيّن أنّ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = -2$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 2$  (نذكر أنّ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ ).

ب) ماذا يمكن قوله عن قابلية اشتقاق الدالة  $h$  عند الصفر؟ أعط تفسيرا هندسيا.

2 بيّن أنّ الدالة  $h$  زوجية، ثم استعمل المنحني  $(\mathcal{C})$  لرسم المنحني  $(\mathcal{C}_h)$  الممثل للدالة  $h$  مع الشرح. (سلم الرسم 2cm)

## تمرين 2:

$$P(A) = \frac{C_n^2 + C_4^2}{C_{n+5}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 6}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2 - n + 12}{n^2 + 9n + 20} \quad (1)$$

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2(5n+4)}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(C) = \frac{C_n^1 \times C_5^1 + C_n^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n^2 + 9n}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(C) = 1 - \frac{C_5^2}{C_{n+5}^2} \quad \uparrow$$

$$(1 \text{ صراء}) P(B \cap C) = \frac{C_n^1 \times C_5^1}{C_{n+5}^2} = \frac{10n}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{n^2 + 9n + 8}{n^2 + 9n + 20} = P(B) + P(RR)$$

$$X = \{0, 1, 2\} \quad (2)$$

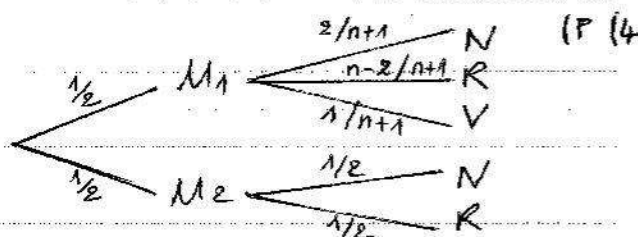
$$P(X=0) = \frac{C_{n+1}^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_{n+1}^1}{C_{n+5}^2} = \frac{8(n+1)}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_{n+5}^2} = \frac{12}{n^2 + 9n + 20}$$

$$E(X) = 0 + \frac{8(n+1)}{n^2 + 9n + 20} + \frac{24}{n^2 + 9n + 20} = \frac{8(n+4)}{(n+4)(n+5)} = \frac{8}{n+5}$$

$$P = \frac{A_n^1 \times A_{n+4}^1}{A_{n+5}^2} = \frac{n}{n+5} \quad (3)$$



$$P(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3n-3}{4(n+1)} \quad (4)$$

$$P(M_2) = \frac{P(M_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3n-3}{4(n+1)}} = \frac{n+1}{3n-3} = \frac{2}{5}$$

$$n = 11 \quad \text{ومنه}$$

## تمرين 3:

1) الاقتراح ج) هو الصحيح:

$$f'(x) = 2 + (1-x^2)e^{-x}$$

$$+ \frac{1}{0} \rightarrow f''(x) = (x-1)^2 e^{-x}$$

"د" عدم ولا تغير إشارة

## نصيح اختيار الفصل 2 2024

### تمرين 1: عبد المطلب

$$W_{n+1} = \frac{U_{n+1} - V_{n+1}}{2} \quad (1)$$

$$W_{n+1} = \frac{\frac{4U_n + V_n}{5} - \frac{2U_n + 3V_n}{5}}{2} = \frac{2U_n - 2V_n}{10}$$

$$W_{n+1} = \frac{U_n - V_n}{5} = \frac{2}{5} \left( \frac{U_n - V_n}{2} \right) = \frac{2}{5} W_n$$

$$W_0 = \frac{U_0 - V_0}{2} = \frac{3}{10} \quad \left( q = \frac{2}{5} \right)$$

$$(ب) W_n = W_0 \cdot q^n = \frac{3}{10} \left( \frac{2}{5} \right)^n \quad (العام)$$

$$-1 < q < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 3V_n}{5} - V_n = \frac{2(U_n - V_n)}{5} = \frac{4}{5} W_n > 0 \quad (P 2)$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n + V_n}{5} - U_n = \frac{V_n - U_n}{5} = -\frac{2}{5} W_n < 0$$

ومنه:  $(V_n)$  متزايدة و  $(U_n)$  متناقصة

(ب)  $(U_n)$  متناقصة و  $(V_n)$  متزايدة ولدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$

أي  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - V_n) = 0$  إذن  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متجاورتان

$$t_{n+1} = 2U_{n+1} + V_{n+1} = \frac{8U_n + 2V_n}{5} + \frac{2U_n + 3V_n}{5} \quad (3)$$

$$t_{n+1} = \frac{10U_n + 5V_n}{5} = 2U_n + V_n = t_n$$

$$t_n = \frac{3}{2} \quad \text{ومنه} \quad t_n = t_0 = 2U_0 + V_0$$

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} U_n + \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \quad 3 \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{3}{2}$$

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^n (U_k - V_k) = 2 \sum_{k=0}^n W_k \quad (4)$$

$$S_n - S'_n = 2 \times \frac{3}{10} \left( \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} \right) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$2S_n + S'_n = \sum_{k=0}^n (2U_k + V_k) = \sum_{k=0}^n t_k$$

$$2S_n + S'_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} (n+1)$$

$$\begin{cases} S_n - S'_n = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ 2S_n + S'_n = \frac{3}{2} (n+1) \end{cases}$$

$$3S_n = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$S_n = \frac{n}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$S'_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة  $f(x)=0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $3 < \alpha < 4$  :  
 $f(3) > 0$  و  $f(4) < 0$  إذن  $f'(x_0) = -2$  يعني  $\frac{-2x_0+2}{x_0+1} = -2$

المعادلة لا تقبل حلولاً ومثلها لا يوجد محاسبات  
 $-x+2\ln(x+1)=m$  ،  $2\ln(x+1)=x+m$  (5)  
 $f(x)=2m+1$  ومثلها  $-2x+4\ln(x+1)=2m$   
 حينئذٍ موجبين تماماً :  $1 < 2m+1 < -1+4\ln 2$   
 ومنه :  $0 < m < -1+2\ln 2$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$I = \int_0^2 \ln(x+1) dx = [x \ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx$$

$$= [x \ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 (1 - \frac{1}{x+1}) dx$$

$$= [x \ln(x+1)]_0^2 - [x - \ln(x+1)]_0^2$$

$$I = [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^2 = 3\ln 3 - 2$$

$f$  موجبة على المجال  $[0, 2]$

$$A = \int_0^2 f(x) dx = [-x^2 + x]_0^2 + 4 \int_0^2 \ln(x+1) dx$$

$$A = -4 + 2 + 4(3\ln 3 - 2) = (12\ln 3 - 10) \text{ u.a.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x) - R(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [-2 + 4 \frac{\ln(x+1)}{x}] = 2 \quad (7)$$

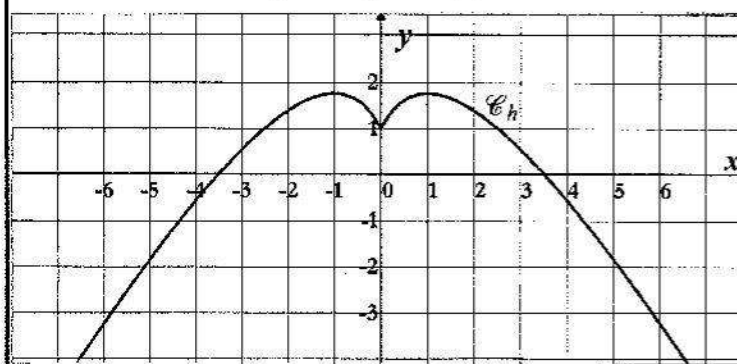
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x) - R(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [2 - 4 \frac{\ln(x+1)}{x}] = -2 \quad (8)$$

$h$  غير قابلة للاستقار عند  $0$  لأن  $h'_y(0) \neq h'_x(0)$  (نصف محاسبات)  
 (ع) يقبل نقطة زاوية  $A(0,1)$  (نصف محاسبات)

$$(x \in \mathbb{R}) \quad R(-x) = f(1-x) = f(|x|)/h(x) = f(|x|) \quad (2)$$

$$(-x \in \mathbb{R}) \quad h(-x) = h(x) \text{ ومنه } h \text{ زوجية}$$

(ع) يطابق  $(P_R) \cdot h(x) = f(x) : x \geq 0$   
 $x \leq 0$  بما أن  $h$  زوجية. نأخذ الجزء المقابل بالنسبة  
 (ع) يقبل كمحور تناظر محور الترتيب.



"عبد المطلب"

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : (ب) \quad f(2(\frac{1}{2}) - x) + f(x) = 2(\frac{1}{2})$$

$$(1-x+1, 1-x+0) \quad f(1-x) + f(x) = 1$$

$$(1-x+0, x+1) \quad f(1-x) + f(x) = 1$$

$$1-x + \ln|\frac{-x}{1-x}| + x + \ln|\frac{x-1}{x}| = 1 + \ln|\frac{x-1}{x-1}| = 1$$

$$\frac{8}{3\ln 3} : (ب) \quad (3)$$

$$u = \frac{1}{1-0} \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 (e^{-x\ln 3} + e^{x\ln 3}) dx$$

$$u = [\frac{-1}{\ln 3} e^{-x\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} e^{x\ln 3}]_0^1 = \frac{1}{\ln 3} [3^{-1} - 3^1] = \frac{8}{3\ln 3}$$

$$\frac{5}{10^x} + 10^x - 6 \leq 0 \text{ يعني } 5 \cdot 10^{-x} + 10^x - 6 \leq 0 \quad (4)$$

$$X = 10^x \text{ بوضع } 10^{2x} - 6 \cdot 10^x + 5 \leq 0$$

$$+ \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \rightarrow X^2 - 6X + 5 \leq 0$$

$$\log 1 \leq x \leq \log 5, 1 \leq 10^x \leq 5, 1 \leq x \leq 5$$

$$\text{ومنه : } 0 \leq x \leq \log 5$$

تمرين 4:

$$f(0) = 1 : f'(1) = 0 \quad (1-I)$$

$f'(0)$  هو معامل توجية المحاس عند  $0$ .

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{1-0} = 2$$

$$(2) \quad f'(x) = a + \frac{c}{x+1} \quad (f \text{ قابلة للاستقار على } \mathbb{R})$$

$$f(0) = 1 \text{ يعني } b + e\ln 1 = 1 \text{ ومنه } b = 1$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} a + \frac{c}{2} = 0 \\ a + c = 2 \end{cases}$$

$$c = 4 \text{ و } a = -2$$

(3)  $(C')$  هو التمثيل البياني لـ  $(-f-2)$ .

نأخذ بالنسبة لـ  $(0, x)$  ثم ن سحب بالشعاع  $(\frac{0}{x})$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad (1-II)$$

مستقيم مقارب عمودي معادلتها  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ \frac{-2x+1}{x+1} + 4 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = -\infty$$

$$f'(x) = -2 + \frac{4}{x+1} = \frac{-2x+2}{x+1} \quad (2)$$

$$-1 + \frac{1}{4} \rightarrow f'(x) \text{ إشارة}$$

| x       | -1        | 1           | + $\infty$ |
|---------|-----------|-------------|------------|
| $f'(x)$ |           | +           | -          |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-1+4\ln 2$ | $-\infty$  |

(3)  $f$  مستمرة ومناقضة تماماً

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ و } f(1) > 0 \quad ]1, +\infty[$$