

موضوع الرياضيات لشعبة العلوم التجريبية في بكالوريا 2011

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	وزارة التربية الوطنية
الدewan الوطني للامتحانات والمسابقات	امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
دورة: جوان 2011	الشعبة: علوم تجريبية
المدة: 03 ساعات ونصف	اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n) :

جـ - لا حسابية ولا هندسية.

ب - هندسية.

أ - حسابية.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

جـ - $-\infty$

ب - $-\frac{1}{2}$

أ - $+\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2 \ln 3} + e^{3 \ln 3} + \dots + e^{n \ln 3}]$.

جـ - $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

ب - $S_n = \frac{1-3^n}{4}$

أ - $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستوى ($\mathcal{P}$) الذي يشمل النقطة

($A(1;-2;1)$) و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ، وليكن ($\mathcal{Q}$) المستوى ذا المعادلة $x + 2y - 7 = 0$.

1. اكتب معادلة ديكرتية للمستوي ($\mathcal{P}$) .

2. أ - تحقق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين ($\mathcal{P}$) و ($\mathcal{Q}$) .

ب - بين أن المستويين ($\mathcal{P}$) و ($\mathcal{Q}$) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3. لنكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ - احسب المسافة بين النقطة C والمستوي ($\mathcal{P}$) ثم المسافة بين النقطة C والمستوي ($\mathcal{Q}$) .

ب - أثبت أن المستويين ($\mathcal{P}$) و ($\mathcal{Q}$) متعامدان.

جـ - استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقاط A ، B و C التي لاحتقاتها على

الترتيب: $z_C = -4 + i$ و $z_B = 2 + 3i$ ، $z_A = -i$

1. أ - اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب - عيّن طول العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = iz - 1 - i$$

أ - عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3. لنكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ - بين أن النقاط A ، C و D في استقامة.

ب - عيّن نسبة التماكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C إلى النقطة D .

ج - عيّن العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

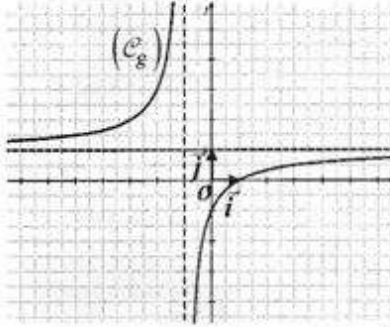
و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) ، بقراءة بيانية:

أ - شكل جنول تغيرات الدالة g .

ب - حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج - عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$



(II) لنكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جنول تغيرات الدالة f .

3. أ - باستعمال الجزء (I) السؤال ج - ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ب - α عدد حقيقي.

بين أن الدالة $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ على المجال $[\alpha; +\infty[$.

ج - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على

المجال $]1; +\infty[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

1. أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب - اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

ج - عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$.

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{u}, \vec{v}$) ، النقاط A ، B و C التي لاحتقاتها على الترتيب:

$$z_C = 4i \text{ و } z_B = 3 + 2i \text{ ، } z_A = 3 - 2i$$

1. أ - علم النقاط A ، B و C .

ب - ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك.

ج - عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2. عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقاط M من المستوى التي تحقق: $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$.

3. أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$.

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب - لتكون M نقطة من المستوى لاحتقاتها العدد المركب z .

- عين مجموعة النقاط M من المستوى التي تحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) النقاط ($A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$).

1. أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ج - بين أن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ متعامدان.

د - استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

2. نعتبر النقطة $M(2+t; 1-4t; 7-t)$ حيث t عدد حقيقي ؛ ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} : h(t) = AM$ أ - اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$.

ج - استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.
 د - قارن بين القيمة الصغرى للدالة h ، و المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} : f(x) = e^x - ex - 1$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

ج - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2. أ - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

ب - اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75; 1,76[$ حلا وحيدا α .

د - ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 2]$.

3. أ - احسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادليتهما: $x = \alpha$ و $x = 0$.

ب - أثبت أن: $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$ (ua هي وحدة المساحات).

التصحيح الرسمي لموضوع الرياضيات لشعبة علوم تجريبية بكالوريا 2011

الإجابة النموذجية لموضوع امتحان شهادة البكالوريا دورة .. 2011.
اختبار مادة: الرياضيات شعبة: علوم تجريبية. المدة: 03 ساعات ونصف

الإجابة النموذجية

عدد الصفحات 4

العلامة		عناصر الإجابة الموضوع الأول
المجموع	مجزأة	
3 نقاط		التمرين الأول (3 نقاط)
	0,75+0,25	1. الإجابة الصحيحة هي (ب-) لأن $V_{n+1} = 3 V_n$
	0,75+0,25	2. الإجابة الصحيحة هي (ج-) لأن $U_n = -\frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$
	0,75+0,25	3. الإجابة الصحيحة هي (ج-) لأن $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = -\frac{1}{2} \frac{3^{n+1} - 1}{2}$
5 نقاط		التمرين الثاني (5 نقاط)
	1	1. المعادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ هي : $-2x + y + 5z - 1 = 0$
	0,5	2. أ - التحقق أن إحداثيات $B(-1; 4; -1)$ تحقق معادلة كل من $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$
	0,5	ب - $\vec{n} = \vec{n}'(1; 2; 0)$ و $(\mathcal{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم (Δ)
	0,5	تمثيله الوسيطى: $t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$
	0,5	3. أ - المسافة بين C و $(\mathcal{P})$: $d_1 = \frac{3\sqrt{30}}{5}$
	0,5	ب - المسافة بين C و $(\mathcal{Q})$: $d_2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}$
	1	ب - $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ و منه $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ متعامدان.
0,5	ج - استنتاج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ) : $d(C; (\Delta)) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 3\sqrt{2}$	
5 نقاط		التمرين الثالث (5 نقاط)
	0.75	1. أ - الشكل الجبري للعدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$
	0.5 x 2	ب - طول $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له: $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$
	0,5	طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .
	0,5	2. أ - طبيعة T محددا عناصره المميزة: T هو الدوران ذو المركز A والزاوية $\frac{\pi}{2}$.
	0,5	ب - استنتاج صورة النقطة B بالتحويل T : $T(B) = C$

العلامة		تابع عناصر الإجابة للموضوع الأول												
المجموع	مجزأة													
0,5		3. أ. $\overline{AD} = \frac{3}{2} \overline{AC}$ و منه A، C، D في استقامية.												
0,5		ب. تعيين نسبة التحاكي $K = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$ ؛ h												
0,75		ج- لدينا $z_D - z_A = a(z_B - z_A)$ و منه $a = \frac{3}{2}i$ عناصر التشابه S هي المركز A والنسبة $\frac{3}{2}$ والزاوية $\frac{\pi}{2}$.												
التمرين الرابع (7 نقاط)														
0,5		(I) أ- جدول تغيرات الدالة g .												
		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	$g'(x)$		+	+	$g(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$
x	$-\infty$	-1	$+\infty$											
$g'(x)$		+	+											
$g(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$											
0,5		ب- $g(x) > 0$ تكافئ $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.												
0,5		ج- $0 < g(x) < 1$ تكافئ $x \in]1; +\infty[$.												
1		(II) 1. حساب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$												
0,5		$x = 1$ و $y = 1$ معادلتا مستقيمين مقاربين C_f												
0,5	7 نقاط	2. أ- نبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$												
0,5+1		ب- $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \left(\frac{2x}{x-1} \right)$ ، لأن $x > 1$ ، $f'(x) > 0$												
0,5		ج- جدول تغيرات الدالة f :												
		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>1</td> </tr> </table>	x	1	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	$-\infty$	1			
x	1	$+\infty$												
$f'(x)$		+												
$f(x)$	$-\infty$	1												
0,5		3. أ- $\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) < 0$ على المجال $]1; +\infty[$:												
0,5		ب- نضع $h(x) = (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ و منه $h'(x) = \ln(x - \alpha)$												
0,5		ج- التحقق: $F(x) = x - (x+3) \ln(x+1) + (x-1) \ln(x-1)$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$												

اختبار مادة: الرياضيات الشعبة/السلك : علوم تجريبية

عناصر الإجابة للموضوع الثاني		العلامة
مجزأة	المجموع	
التمرين الأول (4 نقاط)		
1		1. أ - (v_n) هندسية أساسها α لأن : $v_{n+1} = \alpha v_n$
0,5		ب - عبارة v_n بدلالة n و α : $v_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) \alpha^n$
0,5		- استنتاج عبارة u_n بدلالة n و α : $u_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) \alpha^n - \frac{1}{\alpha - 1}$
0,5		ج - تكون المتتالية (u_n) متقاربة إذا كان $\alpha \in]0; 1[$
0,75		2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$: - حساب بدلالة n ، المجموع S_n : $S_n = 16 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1 \right]$
0,75		- حساب بدلالة n ، المجموع T_n : $T_n = 16 \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$
التمرين الثاني (4 نقاط)		
0,75		1. أ - تعليم النقط A ، B و C :
0,75		ب - طبيعة الرباعي $OABC$: متوازي أضلاع. التعليل: $\frac{z_B - z_C}{z_A} = 1$ أي $\overline{OA} = \overline{CB}$
0,5		ج - لاحظ النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$: $z_\Omega = \frac{3}{2} + i$
0,75		2. لدينا : $M\Omega = 3$ ، (E) الدائرة التي مركزها Ω و نصف قطرها 3 + الإنشاء
0,75		3. أ - $\Delta' = (2i)^2$ وعليه $z_0 = 3 - 2i$ و $z_1 = 3 + 2i$ أو العكس.
0,5		ب - $ z - z_0 = z - z_1 $ معناه $AM = BM$ ؛ إذن المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$ أي محور الفواصل.

عناصر الإجابة للموضوع الثاني		العلامة												
المجموع	مجزأة													
5 نقاط		التمرين الثالث (5 نقاط)												
	1	1. أ. التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) : $\lambda \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 7 - \lambda \end{cases}$												
	0,5	ب. C تنتمي إلى (Δ) لأنه بالتعويض بإحداثيات C نجد $\lambda = 1$ أو $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$												
	1	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ $\overrightarrow{BC}(1; -4; -1)$ $\overrightarrow{AB}(2; 0; 2)$ →												
	0,5	د. $d(A, (\Delta)) = AB = 2\sqrt{2}$												
	0,75	2. أ. عبارة $h(t)$ بدلالة t : $h(t) = AM = \sqrt{8 + 18t^2}$												
	0,5	ب. - تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$												
العلامة	0,75	ج. - أصغر ما يمكن عندما يكون $h'(t) = 0$ أي $t = 0$ القيمة الحدية الصغرى للدالة h هي $h(0) = 2\sqrt{2}$ ومنه $h(0) = d(A, (\Delta))$.												
		التمرين الرابع: (07 نقاط)												
7 نقاط	0,5 x 2	1. أ. حساب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$												
	0,5	ب. حساب $f'(x)$: $f'(x) = e^x - e$												
	0,5	دراسة إشارة $f'(x)$: $- \quad 1 \quad +$												
	0,5	ج. - جدول تغيرات الدالة f :												
		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$- \quad 0 \quad +$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$		$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$
	x	$-\infty$	1	$+\infty$										
	$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$											
	$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$										
	0,5	2. أ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = 0$												
	0,5	ب. - معادلة (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $y = (1 - e)x$: 0												
1	ج. - f مستمرة و متزايدة تماما على $[1, 75; 1, 76]$ $f(1, 75) = -0,0024$ $f(1, 76) = 0,028$													
1	د. - رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحني $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 2]$.													
1	3. أ. حساب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$: $A(\alpha) = \left(-e^\alpha + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1\right) ua$													
0,5	ب. - من $f(\alpha) = 0$ نجد $e^\alpha = e\alpha + 1$ و بالتعويض نجد أن : $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$													