

التوقيت: 2 سا و 30 د

التاريخ: 2022/12/07

المادة: رياضيات

المستوى: 3 ت إ

امتحان الفصل الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإنّ: $u_n < 2$

(3) جد اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(4) لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2u_n - 4$

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول.

(ب) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإنّ: $u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

(ت) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

(4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقين: $-u_0 = 8 + u_2$ و $u_0 - 5u_1 = 22$

(1) بيّن أنّ $u_1 = -4$ ثم استنتج قيمة u_0 .

(2) أحسب الأساس r ثم بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -6n + 2$

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4) استنتج بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^{-10} \times \dots \times 3^{-6n+2}$

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}u_n + \frac{2}{6}}$

(1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

(2) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ كما يلي: $f(x) = a + \frac{b}{x^2 - 2x - 3}$

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحني $(\mathcal{C})$ يشمل النقطة $A(-3; 0)$ و يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$ موازي لمحور الفواصل.
- نضع فيما يلي: $a = 1$ و $b = -12$

(1) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ فإنّ: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$

(2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.

(3) أدرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$.

(4) أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ فإنّ: $f'(x) = \frac{24x - 24}{(x^2 - 2x - 3)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) أثبت أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحني $(\mathcal{C})$.

(6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة $(5; 0)$.

(7) عيّن أحداثيات نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع محوري الإحداثيات.

(8) أنشئ المنحني $(\mathcal{C})$ و المماس (T) .

II- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ بـ: $g(x) = |f(x)|$

(1) أدرس إشارة الدالة f ثم عرّف الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(3) اشرح كيفية انشاء (c_g) انطلاقا من $(\mathcal{C})$ ثم أنشئه في نفس المعلم بلون مغاير.

(4) حل جبريا في $\mathbb{R}$ المعادلة: $g(x) = \frac{20}{x^2 - 2x - 3}$

$$v_0 = 2u_0 - 4 = 2(-2) - 4 = -8$$

$$v_n = v_p \times q^{n-p} \Rightarrow v_0 \times q^{n-0}$$

$$v_n = -8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = 2u_n - 4 \Rightarrow v_n + 4 = 2u_n$$

$$u_n = \frac{v_n + 4}{2}$$

$$u_n = \frac{-8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4}{2} \Rightarrow u_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 2$$

المجموع:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \dots + v_n &= v_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \Rightarrow -4 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= -4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \times \frac{2}{1} \Rightarrow -8 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n = \frac{v_n + 4}{2} &= \frac{1}{2} v_n + 2 \\ &= \frac{1}{2} v_1 + 2 + \frac{1}{2} v_2 + 2 + \dots + \frac{1}{2} v_n + 2 \\ &= \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \dots + \frac{1}{2} v_n + 2 + \dots + 2 \\ &= \frac{1}{2} (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + 2n \\ &= \frac{1}{2} \left[-8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \right] + 2n \\ &= -4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 2n \end{aligned}$$

نصحح الاختبار

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

التقريب 1:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ متزايدة نقاما

(2) البرهان بالتراجع:

- التحقق من صحة P_0 :

$$u_0 < 2 \quad -2 < 2 \Rightarrow \text{مدققة}$$

- نفرض صحة P_n :

- نبين صحة P_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_n &< 2 \\ \Rightarrow u_{n+1} &< 2 \end{aligned}$$

لدينا $u_n < 2$

$$\frac{1}{2} u_n < 1$$

$$\frac{1}{2} u_n + 1 < 2$$

$$u_{n+1} < 2$$

(3) اتجاه التغير:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} u_n + 1 - u_n \\ &= \frac{-u_n + 2}{2} \end{aligned}$$

لدينا $u_n < 2$

$$-u_n > -2$$

$$-u_n + 2 > 0$$

$$\frac{-u_n + 2}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow (u_n) \text{ متزايدة نقاما على } \mathbb{N}$$

التقارب:

بما أن (u_n) متزايدة نقاما ومحدودة من الأعلى ($u_n < 2$) إذن هي متقاربة

$$v_n = 2u_n - 4 \quad (4)$$

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4$$

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} u_n + 1 \right) - 4 \Rightarrow u_n + 2 - 4$$

$$= u_n - 2 \Rightarrow \frac{1}{2} (2u_n - 4)$$

$$= v_n$$

$$v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad (1)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad (2)$$

$$= v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= 1 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] \times \frac{2}{1}$$

$$= 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$f(n) = a + \frac{b}{n^2 - 2n - 3} \quad \text{التقريب 3}$$

$$f(-3) = 0 / f(1) = 4 \quad \text{تعيين } a \text{ و } b$$

$$\rightarrow f(-3) = a + \frac{b}{12} = 0$$

$$\rightarrow f(1) = a + \frac{b}{-4} = 4 \Rightarrow 1 + \frac{b}{-4} = 4$$

$$\frac{b}{-4} = 3 \Rightarrow b = 3 \times -4 \Rightarrow b = -12$$

$$a + \frac{-12}{12} = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$a = 1$$

$$f(n) = 1 + \frac{-12}{n^2 - 2n - 3}$$

$$f(n) = \frac{1(n^2 - 2n - 3) - 12}{n^2 - 2n - 3}$$

$$= \frac{n^2 - 2n - 15}{n^2 - 2n - 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ و $-\infty$ $y=1$

$$\begin{cases} U_0 - 5U_1 = 22 \\ -U_0 = 8 + U_2 \end{cases} \quad \text{التقريب 2}$$

$$-8 = U_0 + U_2 \Rightarrow -8 = 2U_1 \quad (1)$$

$$U_1 = -4$$

$$U_0 - 5(-4) = 22 \Rightarrow U_0 + 20 = 22$$

$$U_0 = 2$$

$$U_1 = U_0 + r \Rightarrow -4 = 2 + r \quad (2)$$

$$r = -6$$

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

$$= U_0 + (n - 0)r \Rightarrow = 2 + (n)(-6)$$

$$= -6n + 2$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n \quad (3)$$

$$= \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$$

$$= \frac{n+1}{2} (2 + -6n + 2)$$

$$= \frac{(n+1)(-3n+2) \times 2}{2}$$

$$= (n+1)(-3n+2)$$

$$= (n+1)(-3n+2)$$

$$= (n+1)(-3n+2)$$

$$P_n = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^{-10} \times \dots \times 3^{-6n+2} \quad (4)$$

$$= 3^{U_0} \times 3^{U_1} \times 3^{U_2} \times \dots \times 3^{U_n}$$

$$= 3^{S_n}$$

$$= 3^{(n+1)(-3n+2)}$$

$$= 3$$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}U_n + \frac{2}{6}}$$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{U_n+2}{6}} \Rightarrow = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6n-2+2}{6}}$$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$1 \swarrow$ $-\infty$	$+\infty$	$4 \swarrow$ $+\infty$	$+\infty$	$1 \swarrow$ $-\infty$

⑤ محور تناظر $x=1$

$$f(2-x) = f(x) \Rightarrow f(2-x) = f(x)$$

$$f(2-x) = 1 - \frac{12}{(2-x)^2 - 2(2-x) - 3}$$

$$= 1 - \frac{12}{4 + x^2 - 4x - 4 + 2x - 3}$$

$$= 1 - \frac{12}{x^2 - 2x - 3} = f(x)$$

⑥ معادلة المماس عند $(5;0)$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= f'(5)(x - 5) + f(5) \Rightarrow = \frac{2}{3}(x - 5) + 0$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$$

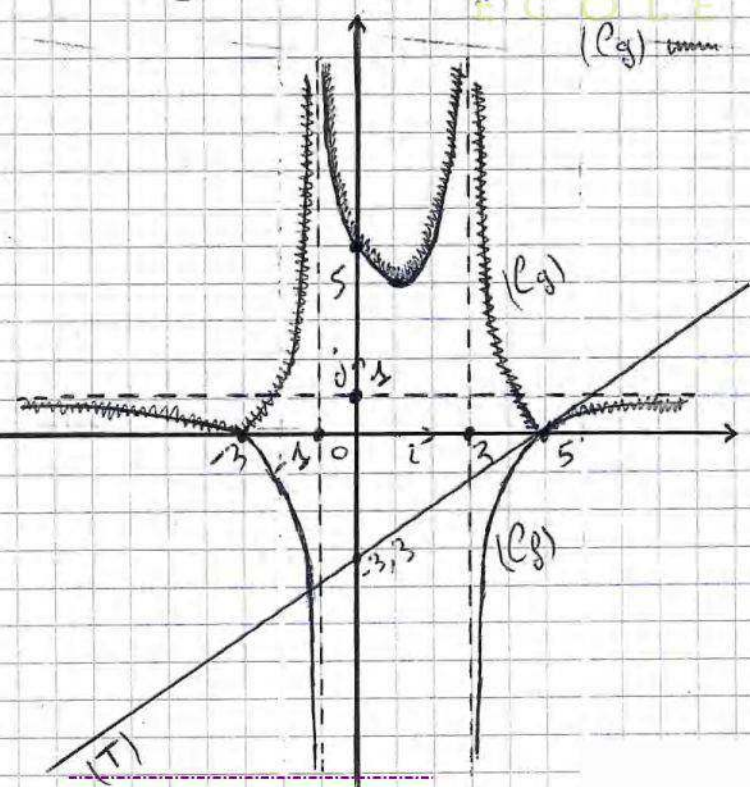
⑦ التوازيات : $f(0)=5$ $(0;5)$

المواضع : $f(x)=0$ $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x_1 = 5 \quad (5;0)$$

$$x_2 = -3 \quad (-3;0)$$

⑧ إنشاء المنحني (C) والمماس (T) و (C_g)



x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$1 \swarrow$ $-\infty$	$+\infty$	$4 \swarrow$ $+\infty$	$+\infty$	$1 \swarrow$ $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 2x - 15 = -12 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 2x - 15 = -12 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 2x - 15 = -12 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 2x - 15 = -12 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي

$x = 3$ مستقيم مقارب عمودي

③ الوضعية بالنسبة للمستقيم (Δ) $y=1$

$$f(x) - y = 1 + \frac{-12}{x^2 - 2x - 3} - 1$$

$$= \frac{-12}{x^2 - 2x - 3}$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
-12					
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	0	+
$\frac{-12}{x^2 - 2x - 3}$	-		+		-
الوضعية	تحت	تحت	فوق	فوق	تحت

④ بيان أن

$$f'(x) = \frac{24x - 24}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+

فترات تزايد $]-1; 1[$ و $]3; +\infty[$

فترات تناقص $[1; 3]$ و $]3; +\infty[$

II - g - دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ بـ: $g(x) = |f(x)|$

① إشارة f :

x	$-\infty$	-3	-1	3	5	$+\infty$
$f(x)$	+	+	-	+	-	+

الدالة g دون رمز القيمة المطلقة :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) &]-\infty; -3] \cup]-1; 3[\cup [5; +\infty[\\ -f(x) & [-3; -1[\cup]3; 5] \end{cases}$$

② جدول تغيرات g :

x	$-\infty$	-3	-1	1	3	5	$+\infty$
$g(x)$	1	0	$+\infty$	$+\infty$	0	1	1

③ حل جبريا في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$g(x) = \frac{20}{x^2 - 2x - 3}$$

$$|f(x)| = \frac{20}{x^2 - 2x - 3}$$

مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة

Ecole Erradja wa Tafaouk

ÉCOLE

$$-f(x) = \frac{20}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 15}{x^2 - 2x - 3} = \frac{20}{x^2 - 2x - 3}$$

$$-x^2 + 2x + 15 = 20$$

$$-x^2 + 2x + 15 - 20 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 5 = 0$$

لا يوجد حلول

$$f(x) = \frac{20}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = \frac{20}{x^2 - 2x - 3}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 20$$

$$x^2 - 2x - 15 - 20 = 0$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = -5$$

Bachachia