



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = -2$ حيث $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

(1) أ) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 2$.

ب) عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 4$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .

ب) جد عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

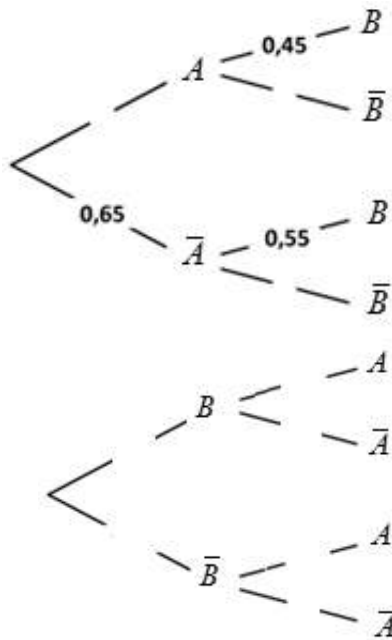
(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الشجرة المقابلة تتمزج تجربة عشوائية حيث A و B حادثتان، $\bar{A}$ و $\bar{B}$ حادثتهما العكسيتان على الترتيب.

(1) انقل وأكمل الشجرة المقابلة ثم احسب الاحتمالات الآتية:

$P(A \cap \bar{B})$ و $P(A \cap B)$.



(2) أ) احسب الاحتمالات الآتية: $P(B)$ ، $P_B(A)$ و $P_{\bar{B}}(A)$.

ب) انقل وأكمل الشجرة المقابلة.



التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجدول الآتي يعطي نسبة الأمية في بلد ما، خلال الفترة الممتدة من 1948 إلى 2008 .

السنة	1948	1958	1968	1978	1988	1998	2008
الرتبة x_i	1	2	3	4	5	6	7
نسبة الأمية y_i	14	92	74,6	60	31	38,4	22

(1) أ) احسب إحداثي النقطة المتوسطة G . (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ب) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد (على حامل محور الفواصل $1cm$ يمثل رتبة واحدة وعلى حامل محور الترتيب $1cm$ يمثل 10%).

(2) بين أن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي : $y = -4,53x + 65,54$.

(3) باستعمال التعديل الخطي السابق ، قدر نسبة الأمية في سنة 2038 في هذا البلد.

(4) ابتداءً من أي سنة تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5%.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2x - 1 - e^{2x}$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}e^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (يعطى: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$)

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25 < \alpha < -0,24$.

ب) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياتها $(0; \frac{-1}{2})$.

ج) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A .

(4) ارسم (T) و (C_f).

(5) أ) احسب بالسنتيمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتان

التي معادلاتها $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$.

ب) تحقّق أن $A(\alpha) = \frac{1}{3}(4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha + 3)cm^2$.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يمثل الجدول الآتي تطور إنتاج مصنع للإسمنت خلال الفترة الممتدة من 2010 إلى 2014.

السنة	2010	2011	2012	2013	2014
ترتيب السنوات x_i	1	2	3	4	5
الإنتاج بالمليون طن y_i	4,8	5	5,5	6,2	7

- (1) عيّن إحداثي النقطة المتوسطة G ثم مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد ($1cm$ يمثل رتبة واحدة على حامل محور الفواصل ، $1cm$ يمثل 1 مليون طن على حامل محور الترتيب)
- (2) لتكن $y = ax + b$ معادلة (Δ) ، مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i; y_i)$.
بيّن أن: $a = 0,56$ ثم احسب b . (تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2})
- (3) من أهداف المصنع الوصول إلى إنتاج يفوق 8,45 مليون طن في سنة 2017 .
هل يمكن تحقيق هذا الهدف باستعمال التعديل الخطي السابق ؟ مع التبرير .
- (4) ابتداءً من أي سنة يتعدى إنتاج المصنع 10,17 مليون طن في السنة .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول $v_0 = 1$ حيث $v_0 = 1$. (أساس اللوغاريتم النيبيري)
- (1) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
 - (2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كما يلي:
من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ ، و $u_n = w_n - v_n$.
بيّن أن : المتتالية (u_n) حسابية ، حدّد أساسها r و حدّها الأول u_0 .
 - (3) أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$ ،
 - (4) استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في كل حالة من الحالات الآتية ، اقترحت ثلاث إجابات واحدة منها فقط صحيحة، عيّن الاقتراح الصحيح مع التبرير .

- (1) A و B حادثتان مستقلتان .
إذا كان : $P(A \cap B) = 0,03$ و $P(A) = 0,4$ فإن :
أ) $P(B) = 0,43$ ب) $P(B) = 0,075$ ج) $P(B) = 0,37$



(2) A و B حادثتان.

إذا كان : $P(A \cap B) = \frac{3}{100}$ و $P_A(B) = \frac{1}{4}$ فإن :

(أ) $P(A) = \frac{3}{25}$ (ب) $P(A) = \frac{4}{25}$ (ج) $P(A) = \frac{3}{400}$

(3) A و B حادثتان .

إذا كان : $P(A) = 0,4$ و $P(B) = 0,5$ و $P(\overline{A \cup B}) = 0,55$ فإن :

(أ) $P(A \cap B) = 0,2$ (ب) $P(A \cap B) = 0,45$ (ج) $P(A \cap B) = 0,9$

(4) الجدول التالي يُعرّف قانون احتمال تجربة عشوائية.

x_i	-2	-1	α	3
$P(X = x_i)$	0,12	0,50	β	0,30

قيمتا α و β حتى يكون الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي 0,32 هما :

(أ) $\alpha = 1$ و $\beta = 0,08$ (ب) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,03$ (ج) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,08$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 - x^2 - 1$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46 < \alpha < 1,48$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) مؤسسة صناعية تنتج يوميا كمية q (مقدرة بالطن) من منتج بكلفة متوسطة C_M (مقدرة بملايين الدنانير)

معرفة على $[0;10]$ بـ: $C_M(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 1 - \frac{1}{2}\ln(q^2 + 1)$.

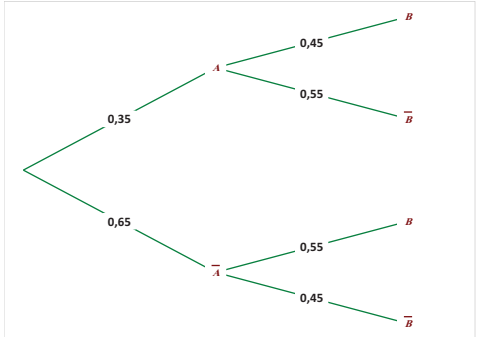
(1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي q من $[0;10]$ ، $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2 + 1}$.

(2) عيّن اتجاه تغير الكلفة المتوسطة C_M ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ $\alpha \approx 1,47$)

(3) عيّن الكمية التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثم حدّد هذه الكلفة المتوسطة .

(4) ما هي الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا؟

العلامة		عناصر الإجابة
مجزأة	مجزأة	

الموضوع الأول		
التمرين الأول: (04 نقاط)		
01.50	0.25 0.25	(1) أ) لما $n=0$ ؛ $u_0 = -2$ و $u_0 < 2$ فالخاصية صحيحة من أجل $n=0$
	0.25	نفرض $u_n < 2$ ومنه $\frac{1}{2}u_n + 1 < 2$ أي $u_{n+1} < 2$
	0.50	وعليه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 2$
	0.25	ب) المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n - 2)$ و $u_n - 2 < 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ بما أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 ومتزايدة تماما فهي متقاربة .
02.00	0.50	(2) أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$
	0.25	أساسها $q = \frac{1}{2}$
	0.25	حذها الأول $v_0 = -8$
	0.50	ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
	0.50	استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$
00.50	0.50	(3) المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$
التمرين الثاني : (04 نقاط)		
01.50	0.50	(1) نقل واكمل الشجرة
		
	0.50 0.50	$p_{A \cap B} = p_A \times p_{B A} = 0,1575$ $p_{A \cap \bar{B}} = p_A \times p_{\bar{B} A} = 0,1925$

العلامة		عناصر الإجابة
مجزأة	مجزأة	
02.50	0.50 0.50 0.25 0.50	(2) أ) حساب الاحتمالات $p_B = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,515$ $p_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{63}{206}$ لدينا $P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(B) = 0,485$ ومنه يكون لدينا $P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{77}{194}$
	0.75	ب) انقل وأكمل الشجرة المقابلة .
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
02.00	01.00	1) أ) احسب إحداثي النقطة المتوسطة G .
	01.00	ب) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$
01.00	01.00	2) بين أن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي : $y = -4,53x + 65,54$.
0.50	0.50	3) باستعمال التعديل الخطي السابق ، قدر نسبة الأمية في سنة 2038 في هذا البلد.
0.50	0.50	4) ابتداءً من أي سنة تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5%.
التمرين الرابع: (08 نقاط)		
01.75	0.25 0.50 0.25	1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g. $g'(x) = 2 - e^{2x}$ إشارة $g'(x)$ g متناقصة تماماً على $[0; +\infty[$ ومتزايدة تماماً على $]-\infty; 0]$
	0.75	2) استنتج إشارة $g(x)$.
01.00	2x0.50	II) 1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

العلامة		عناصر الإجابة								
مجزأة	مجزأة									
01.25	0.50 0.50	$f'(x) = 2x - 1 - e^{2x} = g \quad x < 0$ جدول التغيرات								
	0.25	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="2">—</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$	—		$f(x)$	$+\infty$
x	$-\infty$	$+\infty$								
$f'(x)$	—									
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$								
01.50	0.50	(3) أ) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25 < \alpha < -0,24$								
	0.50	ب) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياتها $(0; \frac{-1}{2})$.								
	0.50	ج) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A $y = -2x - \frac{1}{2} : T$								
00.75	0.25	(4) رسم (T)								
	0.50	(5) رسم المنحنى (C_f)								
01.75	01	(6) أ) المساحة $A(\alpha)$								
	0.75	ب) التحقق أن: $A(\alpha) = \frac{1}{3}(4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha + 3) \text{ cm}^2$.								

العلامة		عناصر الإجابة
مجزأة	مجزأة	

الموضوع الثاني		
التمرين الأول: (04 نقاط)		
01.50	01.00 0.50	(1) إحداثيي النقطة المتوسطة $G(3;5,7)$ تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد
01.00	0.50 0.50	(2) $a = 0,56$ $b = 5.7 - 0.56(3) = 4.02$
0.75	0.25 0.50	(3) الهدف محقق مع التبرير : رتبة 2017 هي 8 ومنه $y = 0.56 \times 8 + 4.02 = 8.5$
0.75	0.25 0.50	(4) $0.56x + 4.02 > 10.17$ ومنه $x > 10.98$ وبتالي $x = 11$ إذن السنة هي 2020
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
00.75	0.75	(1) $S_n = \frac{e^{2(n+1)} - 1}{e^2 - 1}$
01.50	0.50 2×0.50	-1 لدينا $w_n = u_n + v_n$ و $v_n = e^{2n}$ ومنه $u_n = 2n + 4$ (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = 4$
00.75	0.75	(2) اثبات أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$ ، يمكن اعتبار المجموع كمجموع n حدا متتابعا لمتتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 2 او بالبرهان بالتراجع .
01.00	01.00	(3) $T_n = (n + 1)(n + 4) + \frac{e^{2(n+1)} - 1}{e^2 - 1}$
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
00.50	0.25 0.25	(1) الإجابة الصحيحة هي (ب) $p(B) = 0.075$ التعليل: $p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0.03}{0.4} = 0.075$
01.00	0.25 0.75	(2) الإجابة الصحيحة هي (أ) $p(A) = \frac{3}{25}$ التعليل: $p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p_A(B)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{25} = 0.12$
01.00	0.25 0.75	(3) الإجابة الصحيحة هي (ب) $p(A \cap B) = 0.45$ التعليل: $p(A \cap B) = p(A) + p(B) + p(\overline{A \cup B}) - 1 = 0.4 + 0.5 + 0.55 - 1 = 0.45$

العلامة		عناصر الإجابة																
مجزأة	مجزأة																	
01.50	0.50	(4) الإجابة الصحيحة هي (ج) $p(X \geq 2) = 0.38$ التعليل: $\beta = 0.08$ ومنه $0.12 + 0.50 + \beta + 0.30 = 1$ $E(x) = -2 \times 0.12 - 1 \times 0.50 + \alpha \times 0.08 + 3 \times 0.30 = 0.16 + 0.08\alpha$ $\alpha = 2$ ومنه $0.16 + 0.08\alpha = 0.32$																
	0.50																	
	0.50																	
التمرين الرابع: (08 نقاط)																		
00.50	0.50	(I) 1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$																
01.50	0.50	(2) $g'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ إشارة $g'(x)$ g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0]$ و $[\frac{2}{3}; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0; \frac{2}{3}]$ جدول التغيرات:																
	0.25																	
	0.50																	
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$-\frac{31}{27}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>			x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	$g'(x)$	+	0	-	0	+	$g(x)$	$-\infty$	-1	$-\frac{31}{27}$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$														
$g'(x)$	+	0	-	0	+													
$g(x)$	$-\infty$	-1	$-\frac{31}{27}$	$+\infty$														
00.50	0.50	(3) تبين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.46 < \alpha < 1.48$.																
00.50	0.50	(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x . $g(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ و $g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ و $g(\alpha) = 0$																
01.00	01.00	(II) 1) من أجل كل q من $]0; +\infty[$: $C'_M(q) = \frac{q^3 - q^2 - 1}{q^2 + 1}$																
02.00	01.00	(2) إشارة $C'_M(q)$ من إشارة $g(q)$ منه $q = \alpha$ C_M متناقصة تماما على $]q; +\infty[$ و متزايدة تماما على $] -\infty; q[$. جدول التغيرات:																
	01.00																	
01.00	01.00	(3) عدد الوحدات هو: $q = \alpha \times 100 = 147$ وحدة بكلفة																
01.00	01.00	(4) الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن هي $390000DA$																