

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانوية: محمد بوضياف - مديونة
يوم: الثلاثاء 18 نوفمبر 2025

مديرية التربية لولاية غليزان
المستوى: السنة الثانية ثانوي
الشعبة: رياضيات

المدة: 80 دقيقة

الفرض المحروس الثاني للفصل الأول في مادة: الرياضيات

التمرين الأول: ()

الجزء الأول: x متغير حقيقي، نعتبر كثيري الحدود P و Q_α المعرفين كمايلي:

$$Q_\alpha(x) = x^2 + (3 + \alpha)x - \frac{1}{\alpha} \quad \text{و} \quad P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$$

حيث α عدد حقيقي وحيد من المجال $]-0.4, -0.3[$ و يحقق $P(\alpha) = 0$.

(1) ليكن Δ_α مميز ثلاثي الحدود $Q_\alpha(x)$.

(أ) بين أن: $\Delta_\alpha = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$.

(ب) عين إشارة العدد Δ_α ، ثم استنتج إشارة $Q_\alpha(x)$ حسب قيم x .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $P(x) = (x - \alpha)Q_\alpha(x)$.

(3) أدرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2(x-1)^2}$.

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x) = -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية يطلب تعيينها.

(4) ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1: $f(x) = x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$.

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

(5) بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(6) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f''(x) = \frac{-2x-1}{(x-1)^4}$.

(ب) بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

(7) بالاعتماد على التقريب التآلفي، عين قيمة مقربة للعدد $f\left(-\frac{2025}{2026}\right)$.

بالتوفيق للجميع

انتهى الموضوع

3/ إشارة $P(x)$ حسب قيمته:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $Q_\alpha(x) > 0$

إذن إشارة $Q_\alpha(x)$ من نفس إشارة $(x-\alpha)$

$P(x)$: $\begin{array}{c} - \\ -\infty \quad \alpha \quad + \\ +\infty \end{array}$

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2(x-1)^2} ; D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{II}$$

$$(1) \text{ تبين أن } f'(x) = -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$$

الدرجة 4 قابلة للاسقاط على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{2(6x^2 - 8x)(x-1)^2 - 4(x-1)(2x^3 - 4x^2 + 1)}{4(x-1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2 - 4x)(x-1) - (2x^3 - 4x^2 + 1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 7x^2 + 4x - 2x^3 + 4x^2 - 1}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{-x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{(-x)^3 + 3(-x)^2 + 4(-x) + 1}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$$

(2) دراسة إشارة $P(-x)$:

لدينا من أجل كل x من D_f : إشارة $(x-1)^3$ من نفس

إشارة $(x-1)$ ، إذن إشارة $f(x)$ من نفس إشارة $\frac{P(-x)}{(x-1)}$

• لدرس إشارة $P(-x)$ حسب قيمته x :

$x = -\alpha$: هنا $P(-x) = 0$

$x < -\alpha$: هنا $P(-x) > 0$

$x > -\alpha$: هنا $P(-x) < 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	1	$+\infty$
$P(-x)$	+	0	-	-
$x-1$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	-

إذن :
تغير

حل المبرهن :

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1 \quad \text{I}$$

$$Q_\alpha(x) = x^2 + (3+\alpha)x - \frac{1}{\alpha}$$

$$(1) \text{ تبين أن } \Delta_\alpha = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$$

$$\Delta_\alpha = (3+\alpha)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + 6\alpha + 9 + \frac{4}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4}{\alpha} \quad \dots (1)$$

بما أن $P(\alpha) = 0$ فإن :

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^3 = -3\alpha^2 - 4\alpha - 1 \quad \dots (2)$$

$$\Delta_\alpha = \frac{-3\alpha^2 - 4\alpha - 1 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4}{\alpha}$$

$$= \frac{3\alpha^2 + 5\alpha + 3}{\alpha} = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$$

(ج) تبين إشارة Δ_α :

$$\begin{cases} 3,8 < 3\alpha + 5 < 4,1 : \text{ إذن } -0,4 < \alpha < -0,3 \\ -\frac{3}{0,3} < \frac{3}{\alpha} < -\frac{3}{0,4} \end{cases}$$

$$\text{و } -6,2 < 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha} < -3,4 = 4\text{م}$$

إذن : $\Delta_\alpha < 0$ أي إشارة Δ_α سالبة لكلا

• استلج إشارة $Q_\alpha(x)$ حسب قيمته x :

بما أن $\Delta_\alpha < 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$Q_\alpha(x) > 0$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$P(x) = (x-\alpha) Q_\alpha(x)$$

$$(x-\alpha) Q_\alpha(x) = (x-\alpha) \left(x^2 + (3+\alpha)x - \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$= x^3 + (3+\alpha)x^2 - \frac{1}{\alpha}x - \alpha x^2 - \alpha(3+\alpha)x + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 - \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1}{\alpha}x + 1$$

$$\text{بما أن } P(\alpha) = 0 \text{ فإن } \alpha^3 + 3\alpha^2 + 1 = -4\alpha$$

$$(x-\alpha) Q_\alpha(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{4\alpha}{\alpha}x + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 + 4x + 1$$

$$= P(x) \quad \text{و بالتالي } P(x) = (x-\alpha) Q_\alpha(x)$$

إذاً الآلة f متزايدة نسبيًا على المجالين $]-\infty, -\alpha]$ و $[\alpha, +\infty[$ و شاذية نسبيًا على المجال $]-\alpha, \alpha[$.

* جدول التقديرات:

x	$-\infty$	$-\alpha$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

(3) بما أن الآلة f تعتمد من أجل القيمة $-\alpha$ وتغير إشارتها حول أروحاته القيمة فإن $f(-\alpha)$ قيمة حدية محلية للآلة f .

(4) أ) التحقق أن: $f(x) = x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$

لدينا: $x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 x - 2x + 1}{2(x-1)^2}$

$= \frac{2(x^2 - 2x + 1)x - 2x + 1}{2(x-1)^2}$

$= \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2(x-1)^2} = f(x)$

إذن: $f(x) = x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$

ب) دراسة الوضوح التبادلي لـ (f) و (Δ) :
ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y]$

لدينا: $f(x) - y = f(x) - x = \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$

بما أنه من أجل كل x من f : $2(x-1)^2 > 0$ فإن إشارة الفرق $[f(x) - y]$ من نفس إشارة $(-2x+1)$.

وهذه:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0	-
(f) يقطع تحت (Δ)				

(5) بيان أن (f) يقبل محاسا وحيداً (ج) يوازي (د) يطلب تعيين معادلة له:

نحل في D المعادلة: $f(x) = 1$
 $\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{(x-1)^3} = 1$ معناه $\frac{p(-x)}{(x-1)^3} = 1$
معناه $\frac{3x^2 + 4x - 1 - (x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{(x-1)^3} = 0$

معناه: $\frac{x}{(x-1)^3} = 0$ معناه: $x = 0$

إذن (f) يقبل محاسا وحيداً (ج) عند النقطة ذات القاملة $x_0 = 0$ و يوازي (د).

تعيين معادلة (ج): لدينا: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
إذن $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$= 1x + \frac{1}{2}$

$y = x + \frac{1}{2}$ وبالتالي:

16 أ) الآلة f قابلة للاستغناء على D_f ولدينا من أجل كل x من D_f :

$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x + 4)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{(x-1)^6}$

$= \frac{(3x^2 - 6x + 4)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{(x-1)^4}$

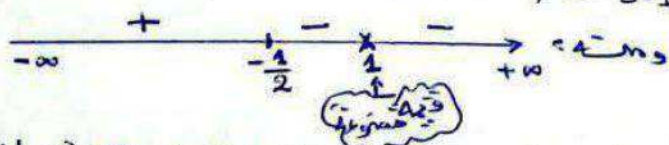
$= \frac{3x^3 - 9x^2 + 10x - 4 - 3x^3 + 9x^2 - 12x + 3}{(x-1)^4}$

$= \frac{-2x - 1}{(x-1)^4}$

ب) دراسة إشارة $f''(x)$:

لدينا من أجل كل x من D_f : $(x-1)^4 > 0$

إذن إشارة $f''(x)$ من نفس إشارة $-2x - 1$.



بما أن $f''(x)$ تعتمد من أجل القيمة $-\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها بجوارحاته القيمة فإن النقطة $(-\frac{1}{2}; f(-\frac{1}{2}))$ نقطة انعطاف للتحنين (f) .

(7) تعيين قيمة حدية لـ $f(-\frac{2025}{2026})$

لدينا: $f(-\frac{2025}{2026}) = f(-1 + \frac{1}{2026})$

إذن: $f(-\frac{2025}{2026}) \approx f'(-1)(\frac{1}{2026}) + f(-1)$

$\approx \frac{9}{8} \times \frac{1}{2026} - \frac{5}{8}$

$\approx \frac{9 - 5 \times 2026}{16208}$

$\approx -\frac{10121}{16208}$

$\approx -0,6244$