



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة / ثانوية الحرية

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : ساعة

فرض في مادة : الرياضيات

التمرين الأول : (06 نقاط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = |x-1| \cdot (x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل.

(1) باستعمال المنحنى (C_f) ضع تخميناً حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 .

(2) أثبت صحة تخمينك .

(3) ناقش بياناً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

حلول المعادلة : $f(x) - m^2 = f(0)$.

التمرين الثاني : (14 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2 + 1}$

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{3x(x-1)(ax^2 + bx + c)}{3x^2 + 1}$ ،

حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها . ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(2) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{3}x \right]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{3}x \right]$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{3}x$.

(3) أحسب $f(-1)$ ، ثم أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x}{3x^2 - 6x + 4}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x-1)$ ثم استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h) .

التمرين الأول : (06 نقاط)

(1) التخمين حول قابلية الاشتقاق الدالة f عند 1 : نلاحظ أن المنحنى يقبل نصفى مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 و منه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 .

2/ إثبات صحة التخمين :

- أولاً ننزع القيمة المطلقة :

$$f(x) = |x-1| \cdot (x+1) = \begin{cases} (x-1) \cdot (x+1) & ; x \geq 1 \\ (-x+1) \cdot (x+1) & ; x \leq 1 \end{cases}$$

و منه :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\cancel{x-1}) \cdot (x+1) - 0}{(\cancel{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-x+1) \cdot (x+1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{(\cancel{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{بما أن :}$$

و منه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 .

(3) المناقشة البيانية ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) - m^2 = f(0)$.

لدينا : $f(x) - m^2 = f(0) \Leftrightarrow f(x) = m^2 + 1$ (المناقشة أفقية)

نضع : $m^2 + 1 = m'$ و منه : $f(x) = m'$ ($m' > 0$)

$m' \in]0; 1[$ للمعادلة حلين مختلفين . و منه : مستحيل أي لا توجد قيم m تحقق المعادلة .

$m' = 1$ للمعادلة حلين أحدهما مضاعف . و منه : $m = 0$ للمعادلة حلين أحدهما مضاعف .

$m' \in]1; +\infty[$ للمعادلة حل وحيد . و منه : $m \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ للمعادلة حل وحيد .

التمرين الثاني : (14 نقطة)

(1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{3x(x-1)(ax^2 + bx + c)}{3x^2 + 1} \quad , \quad \text{ب) التبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(3x^2 + 1) - (6x)(x^3 + 1)}{(3x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 3x^2 - 6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x(x^3 + x - 2)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x(x-1)(x^2 + x + 2)}{(3x^2 + 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

-دراسة اتجاه تغير الدالة f :

ندرس إشارة المشتقة :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ \emptyset \end{cases}$$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$3x$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$x^2 + x + 2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+

و منه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[1; +\infty[$ ، و متناقصة تماما على المجال $[0; 1]$.

- جدول التغيرات :

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

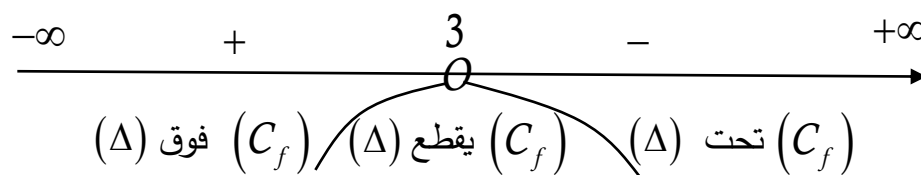
(2) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{3}x \right]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{3}x \right]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \frac{1}{3}x \right] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 1}{3x^2 + 1} - \frac{x}{3} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3(x^3 + 1) - x(3x^2 + 1)}{3(3x^2 + 1)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3 - x}{3(3x^2 + 1)} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-x}{9x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-1}{9x} \right] = 0 \end{aligned}$$

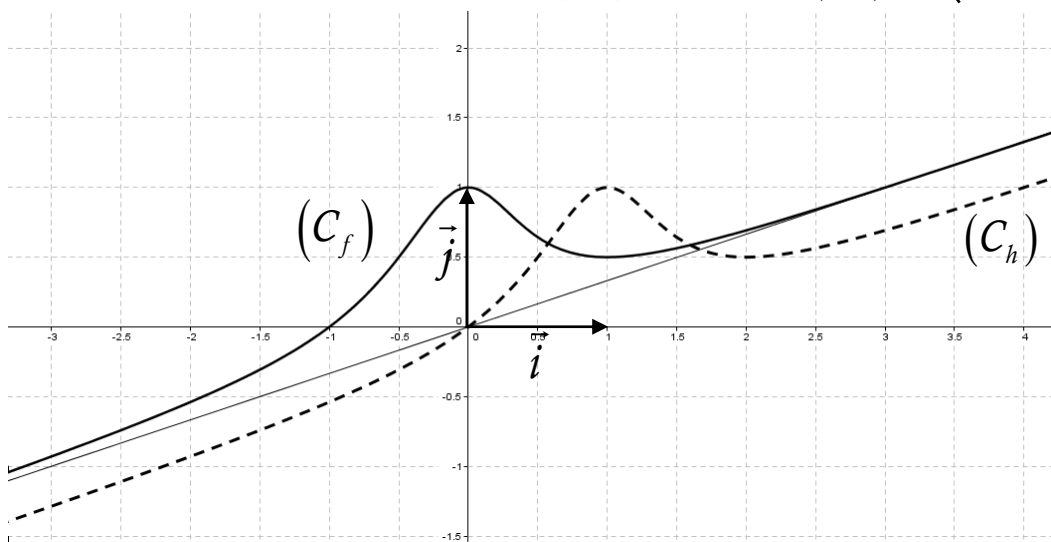
إذن : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = \frac{1}{3}x$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{3}x$:

$$\text{ندرس إشارة الفرق : } f(x) - y = f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{3 - x}{3x^2 + 1}$$



(C_f) تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) فوق (Δ)



(3) حساب : $f(-1) = 0$

- الرسم :

(4) التحقق أن $h(x) = f(x-1)$:

$$f(x-1) = \frac{(x-1)^3 + 1}{3(x-1)^2 + 1} = \frac{(x-1)(x-1)^2 + 1}{3(x^2 - 2x + 1)^2 + 1} = \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 1) + 1}{3(x^2 - 2x + 1) + 1}$$

$$f(x-1) = \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 1) + 1}{3(x^2 - 2x + 1) + 1} = \frac{x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 + 1}{3x^2 - 6x + 3 + 1}$$

$$f(x-1) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x}{3x^2 - 6x + 3 + 1}$$

$$f(x-1) = h(x)$$

- الاستنتاج :

المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بانسحاب شعاع $\vec{v}$ حيث $\vec{v}(1;0)$:
- الرسم (الشكل السابق حيث (C_h) هو المنحنى الممثل بنقاط متقطعة)