

التمرين الأول

① نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

① احسب u_1 و u_2 .

② بين أن : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n}{u_n + 2}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) علما أن $1 \leq u_n \leq 2$.

② لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n}$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم عين حدها الأول v_0 .

② اكتب v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ، لاحظ أن : $\frac{u_n - 2}{u_n} = 1 - \frac{2}{u_n}$

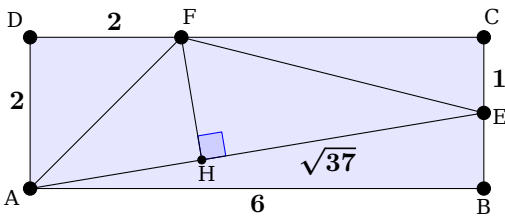
③ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج.

④ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S_2 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

◀ احسب S_1 ثم بين أن : $S_2 = \frac{n+1}{2} + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

التمرين الثاني

① $ABCD$ مستطيل حيث $AD = DF = 2$ و $AE = \sqrt{37}$ و $AB = 6$ ، لتكن E منتصف $[BC]$ و H هي المسقط العمودي للنقطة F على $[AE]$.



① احسب : $\vec{DF} \cdot \vec{FC}$ و $\vec{EC} \cdot \vec{EB}$ ، $\vec{FH} \cdot \vec{AE}$

② بين أن $\vec{AF} \cdot \vec{AE} = 14$ ثم استنتج قياس الزاوية $\widehat{EAF}$.

② في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقط : $A(1,3)$ ، $B(3,3)$ و $C(3,1)$ و لتكن (C_1) مجموعة

النقط $M(x,y)$ حيث : $(C_1) : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$

① بين أن (C_1) دائرة يطلب تعيين مركزها ω_1 و نصف قطرها r_1 .

② بين أن المثلث ABC قائم في B ثم جد معادلة الدائرة (C_2) المحيطة به.

③ هل الدائرتان (C_1) و (C_2) متماسكتان ؟ برر ذلك.

④ جد معادلة للمستقيم (T) مماس الدائرة (C_2) في النقطة B .

⑤ بين أن المستقيم (T) يقطع الدائرة (C_1) ثم جد نقط تقاطعهما.

⑥ أوجد (C') صورة (C_1) بالتحاكي h الذي مركزه النقطة A و نسبته 3.

الإجابة النموذجية

حل التمرين الأول

① حساب : $u_1 = \frac{4}{3}$ و $u_2 = \frac{8}{5}$.

② تبيان أن : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n}{u_n + 2}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 2u_n}{u_n + 2} = \frac{4u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 2u_n}{u_n + 2}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

u_n	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$-$	0	$+$	$+$	0 $-$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

① اثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1}} = \frac{\frac{4u_n}{u_n + 2} - 2}{\frac{4u_n}{u_n + 2}} = \frac{4u_n - 2u_n(u_n + 2)}{4u_n} = \frac{2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2}{4} \left[\frac{u_n - 2}{u_n} \right] = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0} = \frac{1 - 2}{1} = -1$

② كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n : لدينا $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ أي $1 - v_n = \frac{2}{u_n}$ أي $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$: إذن $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

③ نهاية (u_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_0} = 2$: ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

④ حساب S_1 : $S_1 = \left(\frac{\text{الحد الأول}}{1 - q}\right) \times [\text{عدد الحدود}] = \frac{v_0}{1 - q} (1 - q^{n-0+1}) = -2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

استنتاج S_2 : لدينا $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} (1 - v_n)$ أي $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} (1 - v_n)$

$$S_2 = \frac{1}{2} (1 - v_0) + \dots + \frac{1}{2} (1 - v_n) = \frac{1}{2} \left[1(n - 0 + 1) - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}_{S_1} \right] = \frac{(n+1)}{2} + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

حل التمرين الثاني

① حساب : $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$: لأنهما متعامدان ، $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{EB} = -EC \cdot EB = -1 \times 1 = -1$ لأنهما متوازيان و متعاكسان في الاتجاه.

$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{FC} = DF \cdot FC = 2 \times 4 = 8$ لأنهما متوازيان و لهما نفس الاتجاه.

② تبيان أن $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = 14$: في المثلث AEF لدينا : $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} (AF^2 + AE^2 - EF^2) = \frac{1}{2} (8 + 37 - 17) = 14$

استنتاج قياس الزاوية $\widehat{EAF}$: $\widehat{EAF} = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE}}{AF \times AE} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{14}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{8}} \right) \approx 0.81$ أي $\widehat{EAF} \approx 35.54^\circ$ ومنه $\cos(\widehat{EAF}) = \frac{14}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{8}}$

① تبيان أن (C_1) دائرة : $(C_1) : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$ أي $(C_1) : (x - 4)^2 - 4^2 + (y + 1)^2 - 1^2 + 12 = 0$

ومنه $(C_1) : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = (\sqrt{5})^2$ إذن (C_1) دائرة مركزها $\omega_1(4, -1)$ و نصف قطرها $r_1 = \sqrt{5}$

② تبيان أن المثلث ABC قائم في B : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ومنه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ إذن المثلث ABC قائم في B .

يمكن استعمال طريقة فيثاغورث.

▲ إيجاد معادلة الدائرة (C_2) :

طريقة أولى : لتكن $\omega_2(2,2)$ منتصف $[AC]$ و مركز الدائرة (C_2) و ليكن نصف قطرها $\sqrt{2}$ $r_2 = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

اذن $(C_2) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$.

طريقة ثانية : نحسب الجداء $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ نجد $(x-x_A)(x-x_C) + (y-y_A)(y-y_C) = 0$ أي $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

اذن : $(C_2) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$.

③ هل الدائرتان (C_1) و (C_2) متماثلتان : لا لأن $\omega_1\omega_2 = \sqrt{13} \neq r_1 + r_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

④ معادلة المستقيم (T) : بما أن (T) مماس فإن شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{\omega_1 B} \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right)$ أي $(T) : x + y + c = 0$

بما أن $B \in (T)$ فإن $x_B + y_B + c = 0$ أي $c = -6$ اذا معادلة المستقيم هي : $(T) : x + y - 6 = 0$.

⑤ تبيان أن (T) يقطع (C_1) : $d_{(\omega_1, (T))} = \frac{|1 \cdot x_{\omega_1} + 1 \cdot y_{\omega_1} - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} < r_1$: (C_1) يقطع الدائرة (C_1) .

▲ تعيين احداثيهما : لدينا $(*) y = -x + 6$ نعوض العلاقة $(*)$ في معادلة الدائرة (C_2) نجد $2x^2 - 22x + 60 = 0$ نحل المعادلة

من أجل $x = 5$ نعوض في $(*)$ نجد $y = 1$ اذن $E(5, 1)$ و من أجل $x = 6$ نعوض في $(*)$ نجد $y = 0$ اذن $F(6, 0)$.

⑥ إيجاد (C') صورة (C_1) : مركز الدائرة (C') : $\overrightarrow{A\omega'} \left(\begin{matrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{matrix} \right) = 3\overrightarrow{A\omega_1} \left(\begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix} \right)$ أي $x' - x_A = 3 \times 3$

و $y' - y_A = 3 \times (-4)$ ومنه $\omega'(10, -9)$.

نصف قطر الدائرة : $r' = |k| \cdot r_1 = 3\sqrt{5}$ و بالتالي : $(C') : (x-10)^2 + (y+9)^2 = (3\sqrt{5})^2$.