

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

(يتألف الموضوع من صفتين)

نص التمرين: (20 نقطة)

الجزء الأول:

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $R - \{-1\}$ بالعبرة التالية:

$$g(x) = a - \frac{b}{(x+1)^2}$$

حيث a, b ثوابت حقيقية تختلف عن 0

و ليكن (Cg) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- عين الثوابت a, b علما أن:

-(Cg) يقطع حامل محور الترتيب في النقطة: $(0, -4)$.

-(Cg) يقطع حامل محور الترتيب في النقطة: $(\sqrt{5} - 1, 0)$.

2- ادرس اشارة الدالة: g

الجزء الثاني:

لنعتبر الدالة f المعرفة كالتالي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}; x > -1 \\ f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x; x \leq -1 \end{cases}$$

و ليكن (Cf) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- هل الدالة f مستمرة عند: $x = -1$ ؟

3- شكل جدول تغيرات الدالة f .

4-بين أن (Cf) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) جوار $+\infty$.

5-أدرس الوضع النسبي للمنحنى: (Cf) و المستقيم (D) .

6-بين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاثة نقاط مختلفة منها :

$$-3.56 < \alpha < -3.558$$

7-أرسم: (Cf) و (D) على المجال $]-1, +\infty[$

الجزء الثالث:

لنعتبر الدالة k المعرفة كالتالي:

$$k(x) = \frac{x - 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$

و ليكن (Ck) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أجب فيما يلي بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1-الدالة k معرفة على كل $\mathbb{R}$.

2-الدالة k متناقصة تماما على مجموعة تعريفها.

3-المنحنى (Ck) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$$

انتهى

بالتوفيق

الاجابة النموذجية:

الجزء الاول:

١- تعيين الثوابت a و b .

- (g) - يقطع حامل محور الترتيب في النقطة $(0, -4)$ معناه:

$$g(0) = -4$$

- (g) - يقطع حامل محور القواسم في النقطة $(\sqrt{5}-1, 0)$ معناه:

$$g(\sqrt{5}-1) = 0$$

$$g(0) = -4 \Leftrightarrow a - b = -4 \quad \text{--- (1) إذن:}$$

$$g(\sqrt{5}-1) = 0 \Leftrightarrow a - \frac{b}{(\sqrt{5}-1)^2} = 0$$

$$a - \frac{b}{(\sqrt{5})^2} = 0 \Leftrightarrow a - \frac{b}{5} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$a - b = -4 \Leftrightarrow a = b - 4 \quad \text{--- (3) من (1)}$$

$$b - 4 - \frac{b}{5} = 0 \quad \text{نضع (3) في (2):}$$

$$b - \frac{b}{5} = 4 \Leftrightarrow b \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$$

$$\frac{4}{5}b = 4$$

$$\frac{1}{5}b = 1$$

$$\boxed{b = 5}$$

$$\boxed{a = 5 - 4 = 1}$$

نعوض في (3):

$$g(x) = 1 - \frac{5}{(x+1)^2} \quad \text{إذن:}$$

$$g(x) = 0$$

جوابه اولاً، ثانياً، ثالثاً

$$1 - \frac{5}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 - 5 = 0 \quad \text{or} \quad (x+1)^2 = 5 \quad \text{dividing}$$

$$(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5}) = 0$$

$$x = \sqrt{5} - 1 \quad \text{or} \quad x = -1 - \sqrt{5}$$

$$g(x) = 1 - \frac{5}{(x+1)^2} = 0$$

$$\frac{(x+1)^2 - 5}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = 0$$

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \quad \text{dividing} \quad \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(-4)$$

$$\Delta = 4 + 16 = 20 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 - \sqrt{4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5}$$

وحيث ان $(x+1)^2 > 0$ في كل مكان
المسألة

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{5}$	-1	$-1 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 4$	+	0	-	0	+
$g(x)$	+	0	-	0	+

البضع الثاني

12/12

١- حساب النهايات .
 حل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

حل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^3 = -\infty$

٢- دراسة استمرارية الدالة f عند $x = -1$:
 لنحسب نهاية الدالة f على يسار (-1) .

حل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -\frac{2}{3} - 1 + 12 = \frac{31}{3} \approx 10,33$

لأن الدالة f معرفة على يسار (-1) ،
 لنحسب نهاية الدالة f على يمين (-1) ، نستعمل الدالة f

التي عياريتهما :
 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$

حل $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 1) = 1 + 3 + 1 = 5$
 $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0$
 إذن ندرس البساق المقام .
 $x > -1$ ،
 $x + 1 > 0$ ،
 فلان ،

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$
 لأن $\frac{5}{0 \text{ موجب}} = +\infty$

نلاحظ أن :
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

لأن الدالة f غير مستمرة عند $x = -1$

012

②- تشكيل جدول تغيرات الدالة f .
 = لدرس إشارة الدالة f .

لما $x \in]-1, +\infty[$

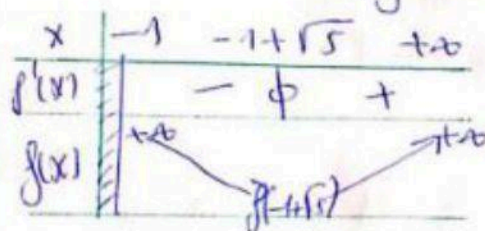
$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)'(x+1) - (x+1)'(x^2 - 3x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x-3)(x+1) - x^2 + 3x - 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3 - x^2 + 3x - 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = g(x)$$

ان إشارة f' من إشارة الدالة g .



التي $x \in]-1, -1+\sqrt{5}[$

الدالة f متناقصة هناك

ولما $x \geq -1+\sqrt{5}$

الدالة f متزايدة هناك.

لما $x \leq -1$

$$f'(x) = (2x^2 - 2x - 12)'$$

$$= 2x^2 - 2x - 12$$

$$f'(x) = 0$$

لدرس إشارة $(2x^2 - 2x - 12)$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

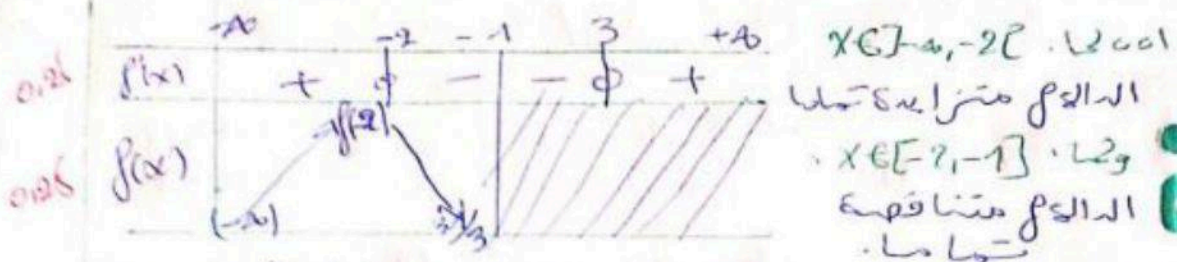
$$\Delta = 1 - 4(1)(-6)$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$$

ان يكون صلات Δ

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$



4- نین ۶۹ (۱) یقین مستقیم مقارب باطل (D) جواب ۱۰

معادله: $y = ax + b$

۱۰ ابحاث ۵۰

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x^2} \right] = 1$$

0.31: $a = 1$

۱۰ ابحاث ۵۰

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 3x + 1 - x^2 - x}{x + 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-4x + 1}{x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x} = -4$$

۱۰ ابحاث ۵۰: $b = -4$

۱۰ ابحاث ۵۰: معادله: $(D): y = x - 4$

۱۰ ابحاث ۵۰: نین ۶۹ (۱) یقین مستقیم مقارب باطل (D) جواب ۱۰

۱۰ ابحاث ۵۰: معادله: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$

٥- دراسة الوضع النسبي لـ (f) و (D) ندرس إشارة

الفروق $f(x) - y_D$.

$$f(x) - y_D = \frac{x^2 - 3x + 1}{x+1} - x + 4 = \frac{x^2 - 3x + 1 + (x+1)(-x+4)}{x+1}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 1 + (-x^2 + 4x - x + 4)}{x+1}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 1 + (-x^2 + 3x + 4)}{x+1}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - 3\cancel{x} + 1 - \cancel{x^2} + 3\cancel{x} + 4}{x+1} = \frac{5}{x+1}$$

١٢. $x > -1$ فإن $x+1 > 0$ مضاف نحصل براسة
إشارة البسط أو $5 > 0$ مضافاً : $f(x) - y_D > 0$

وحياتاً (f) يقع فوق (D) ، $x > -1$

٦- نقاط تقاطع (f) مع حامل محور الفواصل ϕ :
أي حلول المعادلة : $f(x) = 0$

على المجال $]-1, +\infty[$ $f(x) = 0$ تكافئ :
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، $x+1 \neq 0$

$$\Delta = 9 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5 > 0$$

ان يكون جذوراً ،
 $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ / $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

ان كل المجال $]-1, +\infty[$: (f) يقطع (Ox) في نقطتين .

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ (بجای ۱)

توفي في سنة ١٢٠٠ هـ في مدينة بغداد

2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$f(-3,56) \approx -0,032 \quad / \quad f(-3,558) \approx 81,2 \cdot 10^3$$

$f(-3, 5) = 1$ and $f(-3, 6) = 0$

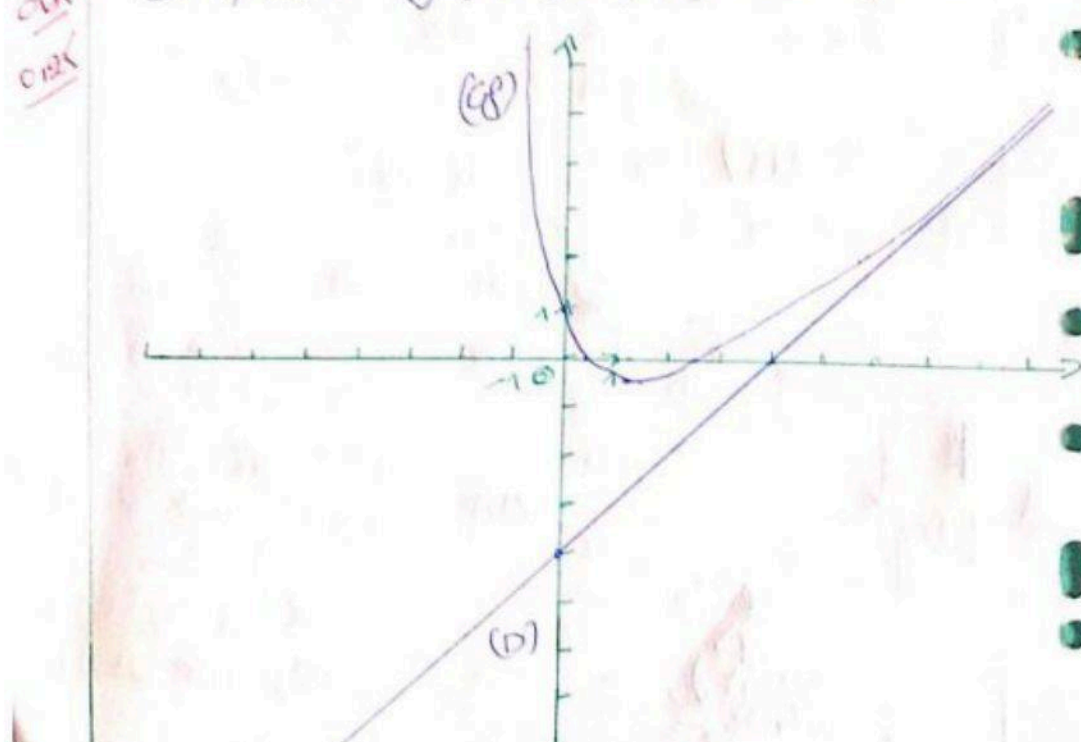
1. Sei $f(x) = 0$ ist, dann ist $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 1$.

على المجال $[-1, 3]$ و $-3.56 \leq x \leq -3.558$

اذن (f) يتقاطع حامله مع المنحني في ثلاثة نقاط.

$$(0, \alpha), \left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}, 0\right), \left(\frac{3\sqrt{6}}{4}, 0\right)$$

3-1, +aE (D), (f) $\rightarrow$, -⑦



0.92

الجزء الثالث

① - خط / التعديل

لنجد مجموعة تعريف الدالة K باستعمال قاعدة مركب

$$K(x) = f(\sqrt{x})$$

والتي، حيث نلاحظ أن

$D_f =]-1, +\infty[$ و الدالة $\sqrt{x} \rightarrow x$ معرفة على المجال

$D_K = [0, +\infty[$ بالتقاطع، بين المجالين نجد أن $D_K = [0, +\infty[$

② - خط التعديل: على المجال $[0, +\infty[$

الدالة K معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ حيث

$$K'(x) = f'(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})', f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot g(\sqrt{x})$$

نعلم أنه من أجل $x \in D_K$ فإن $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

اذن ندرس إشارة $g(\sqrt{x})$ اما سابقا فنجد

$$g(x) = 0$$

$$x = -1 - \sqrt{5} < 0; \quad x = -1 + \sqrt{5} > 0$$

اذن حلول المعادلة $g(\sqrt{x}) = 0$ هي

$$\sqrt{x} = -1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow x = (\sqrt{5} - 1)^2$$

$$\sqrt{x} \neq -1 - \sqrt{5} \quad (\text{مرفوض})$$

اذن إشارة المشتقة $K'(x)$ هي

x	0	$(\sqrt{5}-1)^2$	+
$g(\sqrt{x})$	-	0	+
$K'(x)$	-	0	+

حيث نلاحظ على نفس

إشارة الدالة g

اذن لما $x \in [0, (\sqrt{5}-1)^2]$

الدالة K متناقصة

تصاعدا

ولما $x > (\sqrt{5}-1)^2$

الدالة K متزايدة تصاعدا

جه و(التفسيرات
تغير المطلوب

③ خطه / التعليل

$$K(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 1 = 0, \quad \sqrt{x} + 1 \neq 0$$

بوضع $\sqrt{x} = t$ (0.12) نحصل على $t^2 - 3t + 1 = 0$ ← نستنتج الحلول من الجزء الثاني،

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

اذن $x_1 = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2$ و $x_2 = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$ (0.12)

اذن (C_k) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين

④ - خطبة التعديل

نفس النهاية باستخدام ترتيب دوال

$K(x) = f(x) \circ U(x)$ اذ $U(x) = \sqrt{x}$ نفس

$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$ منه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ منه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = +\infty$

منه