

مارس 2020

المستوى: الثالثة ثانوي رياضي

المدة: 4 سا

اختبار الثلاثي الثاني في الرياضيات

التمرين الأول:

- (1) أوجد مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث : $5x \equiv 12[13]$.
- (2) حل في Z^2 المعادلة $5x - 13y = 12$.
- (3) n عدد طبيعي يكتب $3\alpha 0\alpha 2$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $5\beta 6\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 7. أوجد قيمة كل من α و β ثم استنتج قيمة n .

التمرين الثاني:

- (أ) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = e^{\frac{1}{3} + 2n}$.
- (1) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- (2) أحسب المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- (3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{1 - e^2} (1 - e^{10})$.
- (ب) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$.
- (1) ما طبيعة المتتالية (v_n) ؟
- (2) أحسب بدلالة n المجموع : $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
- عين العدد الطبيعي n علما أن : $S' = \frac{176}{3}$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

(2) بين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$ ثم استنتج نهاية الدالة f عند $(+\infty)$.

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس وضعية

المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

(4) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(5) أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

(7) ارسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) .

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة (لا يمكن التمييز بينها باللمس) منها 5 حمراء و 3 بيضاء و 2 صفراء

الجزء الأول:

(1) نسحب عشوائيا 3 كريات وفي ان واحد.

(أ) ما هو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب.

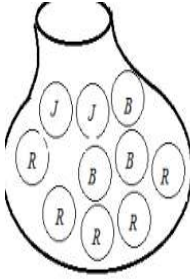
(ب) احسب احتمال كل من الحادثتين التاليتين:

A : "تظهر الألوان الثلاثة في السحب" B : "من بين الكريات المسحوبة توجد بيضاء واحدة على الأقل".

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي.



الجزء الثاني: نفرض أن الكريات المسحوبة في الجزء الأول كلها بيضاء ولم تعاد إلى الكيس.

نسحب الآن من نفس الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع.

اجب ب: صح او خطأ مع التبرير:

أ) عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو 42.

ب) احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو $\frac{10}{42}$

ت) احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء علما أن الأولى صفراء هو $\frac{1}{6}$.

الجزء الثالث: نفرض أن الكريات المسحوبة في الجزء الثاني مختلفة اللون ولم تعاد إلى الكيس.

نسحب الآن من نفس الكيس كرتين على التوالي ويأرجع الكرة المسحوبة.

أ) بين أن: $P_{R_2}(J_1) = \frac{1}{5}$ حيث R_2 تعني الكرة الثانية حمراء و J_1 تعني الكرة الأولى صفراء.

ب) هل الحدثان J_1 و R_2 مستقلان؟

بالتوفيق

قليل من العلم مع العمل به.. ونفع من كثير من العلم مع قلة العمل به.

التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل
التمرين 1	(1) $5x \equiv 12 [13]$ تكافئ $x \equiv 5 [13]$ ومنه $x = 13k + 5$ / $k \in \mathbb{Z}$. (2) حلول المعادلة $5x - 13y = 12$: $\{(13k + 5; 5k + 1) / k \in \mathbb{Z}\}$ (3) $\left. \begin{array}{l} n = 1877 + 130\alpha \\ n = 1757 + 50\beta \\ 0 \leq \alpha < 5 \text{ و } 0 \leq \beta < 7 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} n = 3 \times 625 + 125\alpha + 5\alpha + 2 \\ n = 1715 + 49\beta + 42 + \beta \\ 0 \leq \alpha < 5 \text{ و } 0 \leq \beta < 7 \end{array} \right\}$ ومنه $\left. \begin{array}{l} 5\beta - 13\alpha = 12 \\ 0 \leq \alpha < 5 \text{ و } 0 \leq \beta < 7 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} 50\beta - 130\alpha = 120 \\ 0 \leq \alpha < 5 \text{ و } 0 \leq \beta < 7 \end{array} \right\}$ ومنه $\left. \begin{array}{l} \beta = 5 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\}$ وتكون قيمة n هي : $n = 2007$.

$$\begin{aligned} \text{أ) } u_n &= e^{\frac{1}{3}+2n} \\ u_{n+1} &= e^2 u_n \end{aligned} \quad (1)$$

ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^2 وحدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{3}}$.

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = e^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} \right) \quad (2)$$

$$S = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{1 - e^2} (1 - e^{10}) \quad \text{يكفي } 2n + 2 = 10 \text{ ومنه } n = 4 \quad (3)$$

$$\text{ب) } v_n = \ln(u_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^2 u_n) = 2 + \ln(u_n) = 2 + v_n \quad (1)$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$.

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n+1}{2} \left(\frac{2}{3} + 2n \right) = \frac{(n+1)(3n+1)}{3} \quad (2)$$

$$S' = \frac{176}{3} \quad \text{يكفي } (n+1)(3n+1) = 176 \text{ ومنه } n = 7$$

$$f(x) = x + 1 + \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad (1)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0 \quad (3)$$

ومنه $y = x + 1$: مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

$$\cdot f(x) - (x+1) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < 0 \text{ يقع تحت } (\Delta) \text{ .}$$

(4) دراسة تغيرات الدالة f :

التمرين
3

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

إشارة $f'(x)$

جدول التغيرات :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	

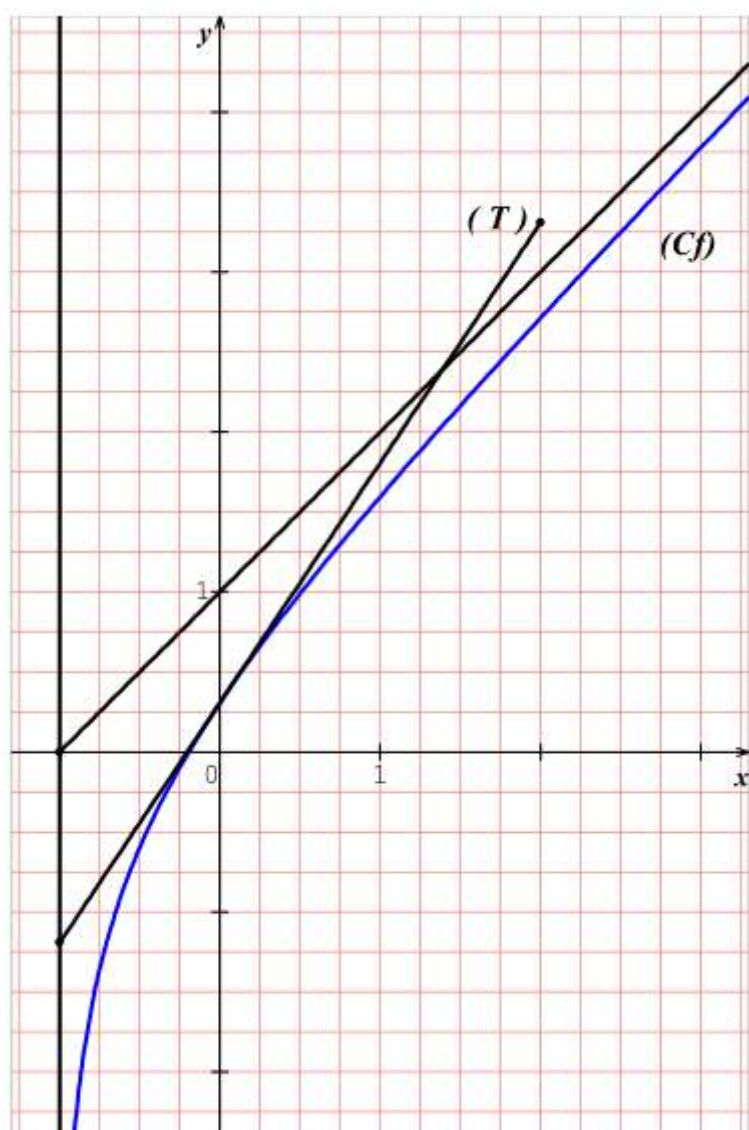
(5) معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$:

$$(T): y = \frac{3}{2}x + 1 - \ln 2$$

(6) المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α

حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. (مبرهنة القيم المتوسطة)

(7) رسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) .



الجزء الأول :

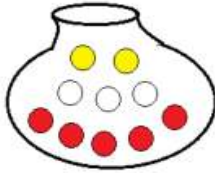
(1) أ- عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: $C_{10}^3 = 120$

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{4} \text{ ب-}$$

$$P(B) = \frac{C_7^2 \times C_3^1 + C_7^1 C_3^2 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{17}{24} \text{ و}$$

(2) أ- قيم المتغير العشوائي X هي: 1، 2 و 3.

ب- قانون احتمال X :



$$P(X=1) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$$

$$P(X=3) = P(A) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = 1 - (P(X=1) + P(X=3))$$

$$= 1 - \left(\frac{11}{120} + \frac{1}{4} \right) = \frac{79}{120}$$

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$

ومنه الامل الرياضياتي :

$$E(X) = 1 \times \frac{11}{120} + 2 \times \frac{79}{120} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{259}{120}$$

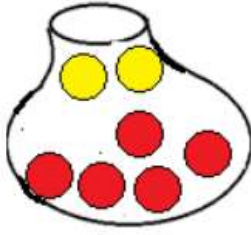
ج-

$$P(e^X > e) = P(X > 1) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{79}{120} + \frac{1}{4} = \frac{109}{120}$$

الجزء الثاني :

(أ) صحيح لان : $A_7^2 = 42$



(ب) خطأ لان : $\frac{A_5^2 + A_2^2}{A_7^2} = \frac{11}{21}$

(ت) خطأ لان : نعتبر الحدثين :

R_2 : "الحصول على الكرة الثانية حمراء".

J_1 : "الحصول على الكرة الاولى صفراء".

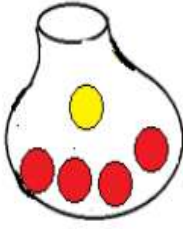
$R_2 \cap J_1$: "الحصول على كرة صفراء وكرة حمراء بهذا الترتيب"

$$P(R_2 \cap J_1) = \frac{A_5^1 \times A_2^1}{A_7^2} = \frac{5}{21}$$

$$P(J_1) = \frac{A_2^2 + A_2^1 \times A_5^1}{A_7^2} = \frac{2}{7} \text{ و } \frac{A_7^1 \times A_6^1}{A_7^2} = \frac{2}{7} \text{ و}$$

$$P_{J_1}(R_2) = \frac{P(R_2 \cap J_1)}{P(J_1)} = \frac{\frac{5}{21}}{\frac{2}{7}} = \frac{5}{6} : \text{ومنه}$$

الجزء الثالث:



$$P(J_1 \cap R_2) = \frac{1^1 \times 4^1}{5^2} = \frac{4}{25} \quad (أ)$$

$$P(R_2) = \frac{4^2 + 1 \times 4}{5^2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$P_{R_2}(J_1) = \frac{P(J_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \quad \text{ومنه :}$$

$$P(J_1) = \frac{1 \times 5}{5^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \quad \text{ب) لنا :}$$

ومنه : $P(J_1 \cap R_2) = P(J_1) \times P(R_2)$ أي الحدثان مستقلان.

ملاحظة: في الجزء الثاني والثالث يمكن ان نستخدم شجرة الاحتمال .