

311-18

(c) *أدلة* *الأدلة*

- (1) أدرس تغيرات الدالة g .
 (2) بين أن المعادلة $g(\alpha) = 0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]2,1[; 2,3[$.
 (3) عيّن إشارة $g(x)$.

عبدالله بن محمد

- (1) أحسب نهايات الدالة f .
- (2) بيّن أنه من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
- (3) عيّن تغيرات الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (4) بيّن أن: $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$.
- (5) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- (6) بيّن أن : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha + 2$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
- (7) أنشئ (Δ) و (C_f) ، ثم ناقش عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = |m|$

1. 3. 3.

5

$$f(x) = |-2x + 6| - \frac{5}{x + 1}$$

- (أ) اكتب $f'(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
 (ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 3$ من اليسار ومن اليمين ، ماذا تستنتج ؟
 (ج) فسّر النتائج هندسياً.
 (د) اكتب معادلتى نصفى المماسين.

$$= |-x^2 - 4x - 4|$$

$$g(x) = |-x^2 - 4x - 4|$$

- (أ) أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
 (ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x = -2$ من اليسار ومن اليمين ، ماذا تستنتج ؟
 (ج) فسر النتائج هندسياً.

$$h(x) = \sqrt{-4x - 8} - 3$$

$$h(x) = \sqrt{-4x - 8} - 3$$

- (أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h على يسار القيمة $x = -2$ ، ماذا تستنتج؟
(ب) أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة.

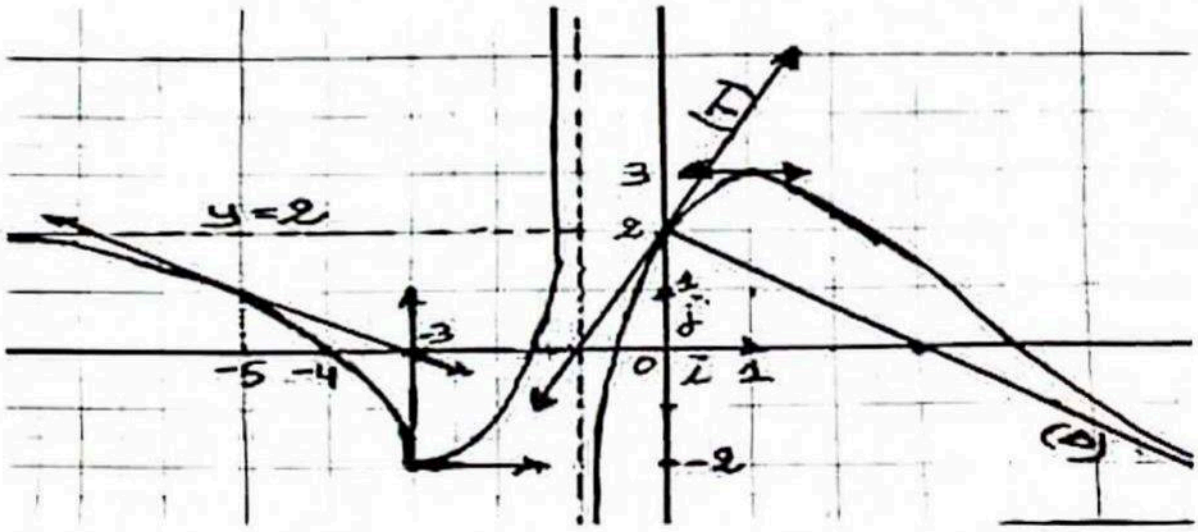
$$-\sqrt{x^2 + 1}$$

$$k(x) \begin{cases} = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & ; x > 0 \\ = \frac{1 - x^2}{x - 2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

- (أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة h على يسار وعلى
يمين العدد $x = 0$ ، ماذا تستنتج ؟
(ب) فسر هندسيا النتائج.

التمرين الثالث:

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس
(0; $\vec{i}$; $\vec{j}$) كما هو موضح في الشكل المقابل :



بقراءة بيانية:

- (1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.
- (2) عيّن: $f'(-3)$; $f(1)$; $f(0)$; $f(-4)$; $f'(0)$; $f'(1)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h)+2}{h} ; \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+2}{x+3} ; \lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x)-1}{x+5}$$

(3) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند $x_0 = 0$.

(4) اكتب معادلة المستقيم (Δ) .

(5) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟ علّل.

(6) هل الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار العدد -3 ؟ علّل.

(7) هل الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين العدد -3 ؟ علّل.

(8) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = -3$ ؟ علّل.

(9) عيّن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + \frac{2}{3}x - 1 \right]$

(10) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(11) عيّن حلول المتراجحتين: $f'(x) \geq 0$; $f'(x) \leq 0$



حل التمرين الأول

I

1 - دراسة تغيرات الدالة g :
 - نهايتي الدالة عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 - 3n - 4 = \lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} g(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 3n - 4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = +\infty$$

- اتجاه تغير الدالة g :
 - حساب $g'(n)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(n) = 3n^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \text{ أي } 3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$! \text{ إذن : إما } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

- $g'(x) < 0$ لما $x \in [-1; 1]$ وعليه $g(x)$ متناقصة
 تماما على المجال $[-1; 1]$.

- $g'(x) \geq 0$ لما $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ وعليه الدالة g
 متزايدة تماما على هذا المجال.

1- حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

- ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = +\infty$$

- ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب

للمنحنى (C_f) يوازي حامل محور الترتيب.

2 - نبين أنه من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$: حيث g قابلة للإشتقاق على Δ_f :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (2x)(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 + 4x^3 - 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

وهو المطلوب :

3 - اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$g(x)$	-	-	-	-	0	+
x	-	-	0	+	+	+
$(x^2 - 1)^2$	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	0	-	-	+

ومن الدالة f متزايدة تمامًا على المجالات

$$[-\infty; -1[\text{ و }]0; 1[\text{ و }]2; +\infty[$$

و متناقصة تمامًا على كل من المجالين

$$[0; 1[$$

$$\text{ و }]1; 2]$$

04

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4 - بين أن: $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$

- باستعمال القسمة الجبرية:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 & x^2 - 1 \\ -x^3 + x & \\ \hline 0 + 2x^2 + x & \\ -2x^2 + 2 & \\ \hline 0 + x + 2 & \end{array}$$

منه، $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

ومنه: $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$

5 - بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ (Δ) مماس لمنحنى (C_f) في $x = 1$

$$f(x) - (x + 2) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1} - (x + 2)$$

$$f(x) - (x + 2) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x^2-1} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- لدينا $\lim [f(x) - (x + 2)] = 0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة

(Δ): $y = x + 2$ مماس لمنحنى (C_f) في $x = 1$

$$\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - \left(\frac{3}{2}\alpha + 2\right) = \frac{2\alpha^3 + 4\alpha^2 - 3\alpha^3 + 3\alpha - 4\alpha^2 + 4}{2(\alpha^2 - 1)}$$

$$= \frac{-\alpha^3 + 3\alpha + 4}{2(\alpha^2 - 1)}$$

$$= \frac{-(\alpha^3 - 3\alpha - 4)}{2(\alpha^2 - 1)}$$

$$= \frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2 - 1)} = 0$$

: $\alpha \in \mathbb{Q}$ $g(\alpha) = 0$ ن

(لأن الفرق بينهما صفر) $\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} = \frac{3}{2}\alpha + 2$

$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha + 2$ ن

07

- حصر : $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha + 2 : \text{نظام}$$

$$2,1 < \alpha < 2,3$$

$$2,1 \times \frac{3}{2} < \frac{3}{2}\alpha < 2,3 \times \frac{3}{2} \quad \text{و مضروب}$$

$$3,15 < \frac{3}{2}\alpha < 3,45$$

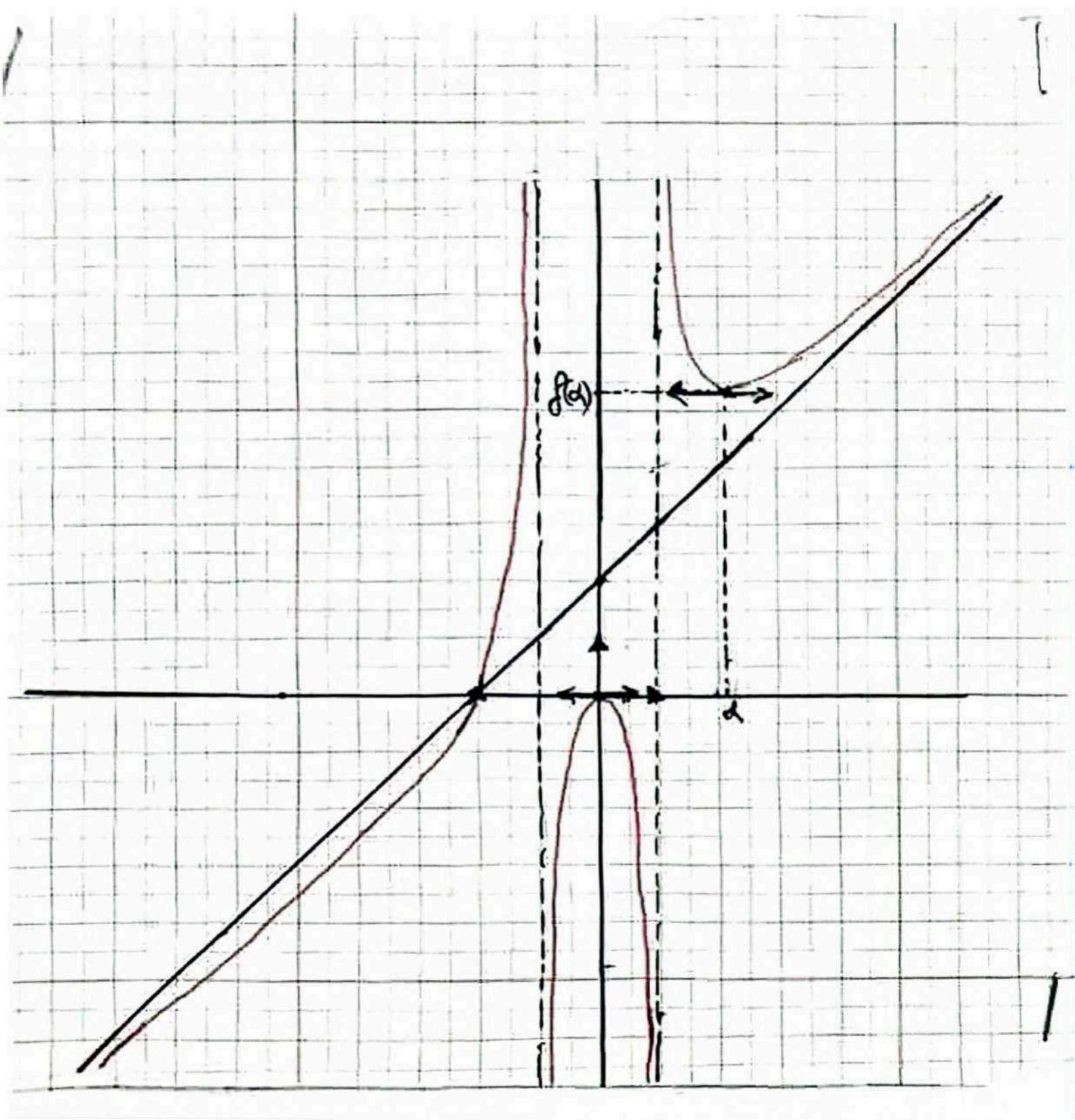
$$3,15 + 2 < \frac{3}{2}\alpha + 2 < 3,45 + 2$$

$$5,15 < \frac{3}{2}\alpha + 2 < 5,45$$

$$5,15 < f(\alpha) < 5,45$$

08





- ناقس بيانياً عدد ولشارة حلول المعادلة: $f(x) = |m|$

- حلول المعادلة $f(x) = |m|$ بيانياً هي فواصل نقط

تقاطع المنحنى (f) مع المستقيم $x = |m|$ في المعادلات $|m| = y$
والموازي $x = -y$ محور الفواصل.

(لاحظ ان $|m| \geq 0$ ناقس فوق محور الفواصل)

- إذا كان: $\begin{cases} |m| = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ للمعادلة $|m| = 0$ (حل عدم وجود حل سالب)

- إذا كان: $\begin{cases} |m| \in]0, f(x)[\\ \text{أو} \\ |m| \in]f(x), +\infty[\end{cases}$ للمعادلة $|m| = f(x)$ حل واحد سالب

- إذا كان: $\begin{cases} |m| = f(x) \\ \text{أو} \\ |m| = -f(x) \end{cases}$ للمعادلة $|m| = f(x)$ (حل موجب و حل سالب)

- إذا كان: $\begin{cases} |m| \in]f(x), +\infty[\\ \text{أو} \\ |m| \in]-\infty, -f(x)[\end{cases}$ للمعادلة $|m| = f(x)$ (حلان موجبان و حلان سالبان)

حل التمرين الثالث :

1- تعيين النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

2- تعيين المماس :

$$f(1) = 3$$

$$f(-3) = -2$$

$$f(-4) = 0$$

$$f(0) = 2$$

حساب $f'(0)$ و $f'(0)$ محتمل
معامل توجيه المماس (3) - (4)
عند $x=0$ و $x=1$ ان المماس (3)

مثل ويشمل النقطتين

فان $A(0, 2)$ $B(-1, 0)$

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$f'(0) = \frac{0-2}{-1-0} = \frac{-2}{-1}$$

$$01 \quad f'(0) = 2$$

حساب $f'(1)$:

$$f'(1) = 0$$

المماس (4) عند $x=1$
بوازي حامل محور الفواصل (افقي)

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x) - 1}{x + 5} :$$

لدينا $f(-5) = 1$ ومعه

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x) - 1}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x) - f(-5)}{x - (-5)} = f'(-5)$$

ولدينا $f'(-5)$ محتمل معامل توجيه
المماس (4) عند $x=-5$
والمماس عند $x=-5$ مائل
ويشمل النقطتين $(-5, 1)$ $(-3, 0)$

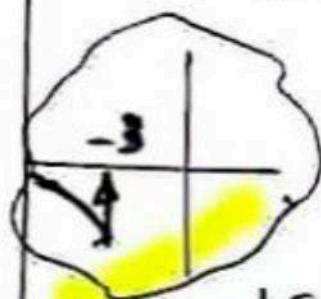
$$f'(-5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 1}{-3 - (-5)} = -\frac{1}{2}$$

اذن

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x) - 1}{x + 5} = -\frac{1}{2}$$

حساب : $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+2}{x+3}$ لدينا : $f(-3) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - (-2)}{x - (-3)}$$



$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = f'_G(-3) = -\infty$$

لأن نصف المماس على يسار -3 عمودي
والدالة f متناقصة تماماً على يسار -3 .

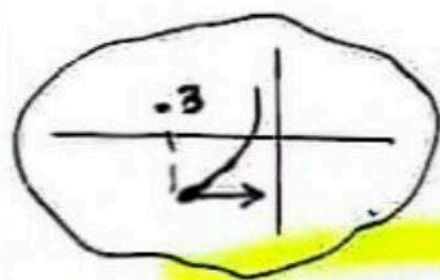
حساب : $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+2}{x+3}$ لدينا : $f(-3) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - (-2)}{x - (-3)}$$

02

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = f'_D(-3) = 0$$

لأن نصف المماس على يمين -3 يوازي



حامل محور الفواصل أفقي

3- كتابة معادلة المماس $(\mathcal{L})$ عند $x_0 = 0$

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

لدينا: $f'(0) = 2$ و $f(0) = 2$ إذن:

$$(T): y = 2x + 2$$

4- معادلة المستقيم (Δ) : $y = ax + b$

حساب a : المستقيم (Δ) يشمل النقطتين $(0, 2)$ و $(3, 0)$

$$\text{إذن: } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

$$(A): y = -\frac{2}{3}x + b$$

تعيين b : نعوّض بإحدى النقطتين:

$$(0, 2) \in (\Delta) \Rightarrow 2 = -\frac{2}{3}(0) + b$$

$$\text{وعليه } b = 2 \text{ إذن: } (A): y = -\frac{2}{3}x + 2$$

الآن في قابلية الاشتقاق عند $x_0 = 0$

التعليل: لأن المماس $(\mathcal{L})$ يقبل عند النقطة ذات الفاصله $x_0 = 0$ مماسا عليه