

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leq 3$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أنها متقاربة

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2}\right)$

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ ، احسب حدها الأول

ب - أكتب v_n بدلالة n ثم بين أن $u_n = \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+1} - 1}$ ، احسب $\lim u_n$

(4) أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

ب - بين أن : $\left(\frac{u_0 - 1}{u_0 - 2}\right) \times \left(\frac{u_1 - 1}{u_1 - 2}\right) \times \left(\frac{u_2 - 1}{u_2 - 2}\right) \times \dots \times \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2}\right) = 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $A_n^2 = 30$

(2) كيس يحتوي على 6 كريات متماثلة منها 3 كريات سوداء وكريتين خضراوين و كرة حمراء

نسحب عشوائيا من الكيس كرتين على التوالي بدون إرجاع الكرة المسحوبة

نعتبر الحوادث التالية: A (الحصول على كرية واحدة سوداء)

B (الحصول على كرية واحدة خضراء)

C (الحصول على كرية سوداء و كرية خضراء)

D (الحصول على الأقل على كرية سوداء)

بين أن احتمال الحادثة A هو : $P(A) = \frac{3}{5}$ ، ثم احسب احتمال الحوادث: D ، C ، B

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان على الكريات المسحوبة

عين قيم X ثم عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب الامل الرياضي

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $z^2 - 10z + 50 = 0$ المعادلة: $\square$
- (2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب

$$z_B = 5 - 5i \quad \text{و} \quad z_A = 5 + 5i$$

أ- علم النقطتين A و B .

ب - أكتب z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي. و استنتج طبيعة المثلث OAB

$$\text{ج - بين أن : } \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2021} - \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1442} = 1 + i$$

(3) ليكن C مرجح الجملة $\{(A;1); (B;-1); (O;1)\}$.

ما هي طبيعة الرباعي $OBAC$ ؟ استنتج z_C لاحقة C . علم النقطة C

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MO}\| = 5\sqrt{2}$

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين (Γ) و انشئها

التمرين الرابع: (7 نقاط)

- (I) الدالة g معرفة على المجال $\square$ بالعلاقة: $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$
- (1) احسب نهايتي g عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ثم ادرس اتجاه تغير g وشكل جدول تغيراتها
- (2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\square$

(II) الدالة f معرفة على المجال $\square$ بالعلاقة: $f(x) = x(1 - e^{-x})^2$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب نهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

(2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ فسر النتيجة هندسيا

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل (Δ)

(3) أ- أثبت أنه ، من أجل كل x من $\square$: $f'(x) = (e^{-x} - 1)g(-x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة ذات الفاصلة 0؟

(4) ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$

(5) m وسيط حقيقي ، عين قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاث حلول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$

(1) احسب u_1, u_2, u_3

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن: $u_n > \frac{4}{3}n$ ثم احسب نهاية (u_n)

(3) لتكن المتتالية (v_n) حيث: من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n = u_n - 2n + 1$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n ثم u_n بدلالة n , ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(5) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بعدها الأول $w_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$$

احسب w_1, w_2, w_3 و w_4 ما تخمينك حول طبيعة المتتالية (w_n)؟

برهن على أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $w_n = 2n - 1$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $C_n^3 = 12(n-2)$

(2) كيس يحتوي على 9 قريصات متماثلة منها اربع قريصات بيضاء مرقمة بـ: 1, 1, 1, 2 وثلاث

قريصات حمراء مرقمة بـ: 2, 2, 2 و قريصتين سوداوين مرقمتين بـ: 1, 2

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قريصات في آن واحد

ونعتبر الحادثتين:

A (الحصول على 3 قريصات من نفس اللون)

B (الحصول على 3 قريصات تحمل نفس الرقم)

أ- بين ان احتمال الحادثة A هو: $P(A) = \frac{5}{84}$

ب - احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية: $A \cup B$, $A \cap B$, B

(3)- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الارقام على الكريات المسحوبة

عين قيم X ثم عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- (1) حل في $\square$ المعادلة $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ في $(i\bar{z} - 1 + i)$
- (2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين A و B لاحتقاهما على الترتيب $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = -1 + i$
- أ- أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
- ب - أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC
- ج - عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ACDB$ مستطيل
- (3) اكتب العدد $z_A \times z_C$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي واستنتج قيمتي $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
- (4) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $\arg(z_A - z) - \arg(z_B - z) = \pi + 2k\pi$ و $(k \in \mathbb{Z})$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

- نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$
- (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فسر النتائج ببيانها
- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (2) بين أنه من أجل كل x من I ، $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}$ ، ادرس اتجاه تغير f ، ثم شكل جدول تغيراتها
- (3) (γ) المنحنى ذو المعادلة $y = \ln x$
- أ- تحقق من أن $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
- ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ وماذا تستنتج؟
- ج- بين أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $\frac{x+1}{x} > 1$ ، واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (γ) على $]1; +\infty[$
- (4) ارسم (γ) و (C_f)
- (5) نعتبر الدالة h المعرفة على $\square - \{-1; 1\}$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{|x+1|-2} + \ln|x+1|$
- (C_h) المنحنى الممثل للدالة h في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحنى (C_h)
- ب - بين أنه من أجل كل x من $I =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ ، $h(x) = f(x)$
- ج- ارسم (C_h) في نفس المعلم

التمرين الأول :

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n \leq 3$ ،
من أجل $n = 0$ ، $2 < u_0 \leq 3$ محققة

نفرض أنه لكل n من $2 < u_n \leq 3$ ، ونبرهن أن $2 < u_{n+1} \leq 3$

لدينا $2 < u_n \leq 3$ تكافئ $-1 < -\frac{2}{u_n} \leq -\frac{2}{3}$ ومنه $2 < u_{n+1} \leq 3$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أنها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n}$$

$$-u_n^2 + 3u_n - 2 = 0 \text{ تعني } u_n = 2 \text{ أو } u_n = 1$$

u_n	2	3
$-u_n^2 + 3u_n - 2$	0	—

المتتالية (u_n) متناقصة

الاستنتاج: بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

(3) أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 2$

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2} \right) = \ln \left(\frac{2u_n - 2}{u_n - 2} \right) = \ln \left(2 \times \frac{u_n - 1}{u_n - 2} \right)$$

$$v_{n+1} = \ln 2 + \ln \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2} \right) = \ln 2 + v_n$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول $v_0 = \ln 2$

ب - $v_n = \ln 2 + n \ln 2 = (n+1) \ln 2 = \ln 2^{n+1}$ بدلالة n

$$e^{v_n} = \frac{u_n - 1}{u_n - 2} \text{ ومنه } v_n = \ln \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2} \right) \text{ لدينا}$$

$$u_n = \frac{2e^{v_n} - 1}{e^{v_n} - 1} \text{ ومنه } u_n e^{v_n} - 2e^{v_n} = u_n - 1$$

$$u_n = \frac{2e^{\ln 2^{n+1}} - 1}{e^{\ln 2^{n+1}} - 1} = \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+1} - 1}$$

$$\lim u_n = \lim \frac{2^{n+1} \left(2 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)}{2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)} = 2$$

(4) أ- حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = \frac{n+1}{2} (\ln 2 + \ln 2^{n+1}) = \frac{(n+1)(\ln 2^{n+2})}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ln 2 = \ln 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$T_n = \left(\frac{u_0 - 1}{u_0 - 2} \right) \times \left(\frac{u_1 - 1}{u_1 - 2} \right) \times \left(\frac{u_2 - 1}{u_2 - 2} \right) \times \dots \times \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2} \right) \text{ ب -}$$

$$T_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{S_n} = 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(1) تعيين قيمة $A_n^2 = 30$: تعني $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ ومنه

$$n^2 - n - 30 = 0 \text{ أي } n(n-1) = 30 \text{ أي } \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30$$

$$n = -5 \notin \square \text{ أو } n = 6$$

$$P(A) = \frac{2(A_3^1 \times A_3^1)}{A_6^2} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{2(A_2^1 \times A_4^1)}{A_6^2} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(C) = \frac{2(A_3^1 \times A_2^1)}{A_6^2} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P(D) = \frac{2(A_3^1 \times A_3^1) + A_3^2}{A_6^2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

قيم X	1	2
الاحتمال	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$

(3) قيم X هي $\{0; 1\}$

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{15} + 2 \times \frac{11}{15} = \frac{26}{15} \approx 1.73$$

التمرين الثالث : (4 نقاط)

$$z^2 - 10z + 50 = 0 \quad (1)$$

$$z_2 = 5 - 5i , z_1 = 5 + 5i , \Delta = -100 = (10i)^2$$

$$z_B = 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} , z_A = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2)$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^{2021} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2021} = e^{i\frac{2021\pi}{2}} = e^{i(1010\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^{1442} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{1442} = e^{i\frac{1442\pi}{2}} = e^{i(721\pi)} = e^{i\pi} = -1$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^{2021} - \left(\frac{z_A}{z_B} \right)^{1442} = 1 + i \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \text{ لدينا } \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB} \text{ أي } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$$

وبالتالي الرباعي $OBAC$ متوازي أضلاع

$$z_C = z_C - z_B + z_O = 10i$$

$$A \in (\Gamma) \text{ لدينا } \|\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 5\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\|\overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2} \text{ تعني } \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MO}\| = 5\sqrt{2}$$

(Γ) دائرة مركزها C ونصف قطرها $5\sqrt{2}$

x	$-\infty$	1.5-	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	
$g(x)$	-1	$-2e^{\frac{-3}{2}} - 1$	0	$+\infty$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad (1) \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2xe^x + e^x - 1] = -1$$

$$g'(x) = (2x + 3)e^x$$

$$g(0) = 0, \quad g(x) < 0 \text{ على }]-\infty; 0[\text{ و } g(x) > 0 \text{ على }]0; +\infty[\quad (2)$$

$$f(x) = x(1 - e^{-x})^2 \quad (II)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{-x}(e^{-x} - 2)] = 0 \quad \text{ا.} \quad (\Delta): y = x \text{ المستقيم ، المقارب مائل لـ } (C_f) \text{ عند } +\infty$$

$$b. \quad e^{-x} - 2 \geq 0 \text{ تكافئ } e^{-x} \geq 2 \text{ تكافئ } -x \geq \ln 2 \text{ تكافئ } x \leq -\ln 2$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
x	-	-	0	+
$e^{-x} - 2$	+	0	-	-
$f(x) - x$	-	0	+	-
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

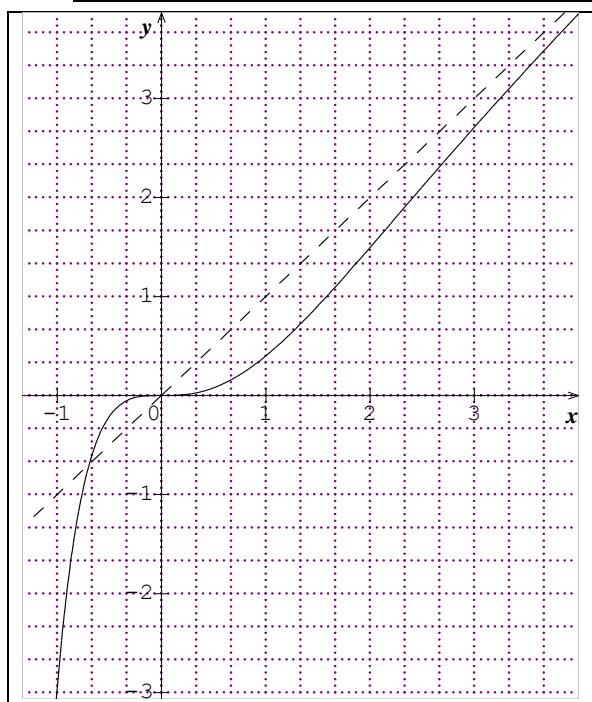
$$(3) \quad f(x) = (1 - e^{-x})^2 - 2xe^{-x}(1 - e^{-x}) = (1 - e^{-x})[1 - e^{-x} - 2xe^{-x}] \quad \text{ا.}$$

$$f'(x) = (e^{-x} - 1)[(-2x + 1)e^{-x} - 1] = (e^{-x} - 1)g(-x)$$

b.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	$-\infty$		$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-
$e^{-x} - 1$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	+



النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة انعطاف

$$(4) \quad \text{رسم المنحنى } (C_f) \text{ على المجال } [-1; +\infty[, \quad f(-1) \approx -3$$

$$(5) \quad \text{حلول المعادلة } f(x) = mx \text{ هي فواصل نقط تقاطع والمستقيمات المعرفة بالمعادلة } y = mx$$

$$\text{قيم } m \text{ التي من أجلها تقبل المعادلة } f(x) = mx \text{ ثلاث حلول هي } 0 < m < 1$$

صفحة 2 من 4

التمرين الثاني: (4 نقاط)

$$(1) \quad \text{تعيين قيمة } n : C_n^3 = 12(n-2) \text{ تعني } \frac{n!}{(n-2)!3!} = 12(n-2)$$

$$\text{التمرين الأول: (5 نقاط)} \quad (1) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 4n + 4}{3}, \quad u_0 = 3$$

$$u_3 = \frac{139}{27}, \quad u_2 = \frac{31}{9}, \quad u_1 = \frac{7}{3}$$

$$n^2 - n - 72 = 0 \text{ ومنه } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)! \cdot 3!} = 12(n-2)$$

$$n = -8 \notin \square \text{ أو } n = 9, \Delta = 289 = 17^2 \text{ أي}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}, P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84} \quad (2)$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{84} + \frac{14}{84} - \frac{2}{84} = \frac{17}{84}$$

(3) - قيم X هي $\{3; 4; 5; 6\}$

$$P(x=4) = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}, P(x=3) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{21}$$

$$P(x=6) = \frac{C_5^3}{84} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}, P(x=5) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

قيم X	3	4	5	6
لاحتمال	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

الأمثل الرياضيائي

$$E(x) = \frac{14}{3} \approx 4.66$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

$$(1) \text{ حل المعادلة } (i\bar{z} - 1 + i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

$$\bar{z} = \frac{1-i}{i} \times \frac{-i}{-i} = -1-i \text{ تعني } i\bar{z} - 1 + i = 0 \text{ إما}$$

$$z = -1+i \text{ أي}$$

$$\text{أو } z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

$$z_2 = \sqrt{3} - i, z_1 = \sqrt{3} + i, \Delta = -4 = (2i)^2$$

$$(2) \text{ أ- } z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ و } z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{ب- } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1-\sqrt{3}}{-2i} \times \frac{i}{i} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i = \frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

طبيعة المثلث ABC : قائم في A

$$\text{ج- } z_D = -1-i \text{ أي } z_C - z_A = z_D - z_B \text{ مستطيل } ACDB$$

$$(3) z_A \times z_C = (\sqrt{3}+i)(-1+i) = -\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}-1)i$$

$$z_A \times z_C = (2e^{i\frac{\pi}{6}})(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}) = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{11\pi}{12})}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ و } \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$(4) \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \pi + 2k\pi \text{ تعني } (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) = \pi + 2k\pi$$

مجموعة النقط (z) هي القطعة المستقيمة $[A; B]$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 0$

أجل $n=0, u_0 > 0$ محققة

نفرض أنه من أجل كل n من $\square, u_n > 0$ ونبرهن أن: $u_{n+1} > 0$

لدينا لكل n من $\square, u_n > 0$ و $4n+4 > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$

ب- لدينا لكل $n, n \geq 1, u_{n-1} > 0$ ولدينا $3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4$

تكافئ $3u_n - 4n > 0$ ومنه $u_{n-1} = 3u_n - 4n$ أي $u_n > \frac{4}{3}n$

لدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3}n = +\infty$ و $u_n > \frac{4}{3}n$ ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

$$(3) \text{ أ- } v_{n+1} = u_{n+1} - 2n - 1 = \frac{u_n + 4n + 4}{3} - 2n - 1 = \frac{1}{3}v_n$$

(v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_n = 4$

$$\text{ب- } v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لدينا $u_n = v_n + 2n - 1$ ومنه $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1 \right] = +\infty$$

(4) حساب S_n بدلالة n : لدينا $u_n = v_n + 2n - 1$

$$S_n = (v_0 - 1) + (v_1 + 1) + (v_2 + 3) + \dots + (v_n + 2n - 1)$$

$$\text{ومنه } S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + [-1 + 1 + 3 + \dots + (2n - 1)]$$

$$S_n = v_0 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) + \frac{n+1}{2} [-1 + (2n - 1)]$$

$$S_n = v_0 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) + \frac{n+1}{2} [-1 + (2n - 1)]$$

$$S_n = 6 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] + n^2 - 1$$

$$(5) w_4 = 7, w_3 = 5, w_2 = 3, w_1 = 1$$

التخمين حول طبيعة المتتالية (w_n): حسابية أساسها 2

برهن على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, w_n = 2n - 1$

أجل $n=0, w_0 = -1$ محققة

نفرض أن $w_n = 2n - 1$ ونبرهن أن: $w_{n+1} = 2n + 1$

$$w_{n+1} = \frac{(n+2)w_n + 3}{n+1} = \frac{(n+2)(2n-1) + 3}{n+1} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{n+1}$$

$$w_{n+1} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{n+1} = \frac{(2n+1)(n+1)}{n+1} = 2n+1$$

الموضوع الثاني

صفحة 3 من 4

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1) \quad \text{التمرين الرابع: (7 نقاط)}$$

(1) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ التفسير: $x = -1$ و $x = 1$ مستقيمان مقاربان عموديان

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2} \quad (2)$$

x	-1	0	1	3	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$x+1$	+	+	+	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

f متناقصة تماما على $[1;3]$ و على $[0;1[$ ، f متزايدة تماما على $]-1;0]$ و على $[3;+\infty[$ (3) $y = \ln x$ المنحنى ذو المعادلة

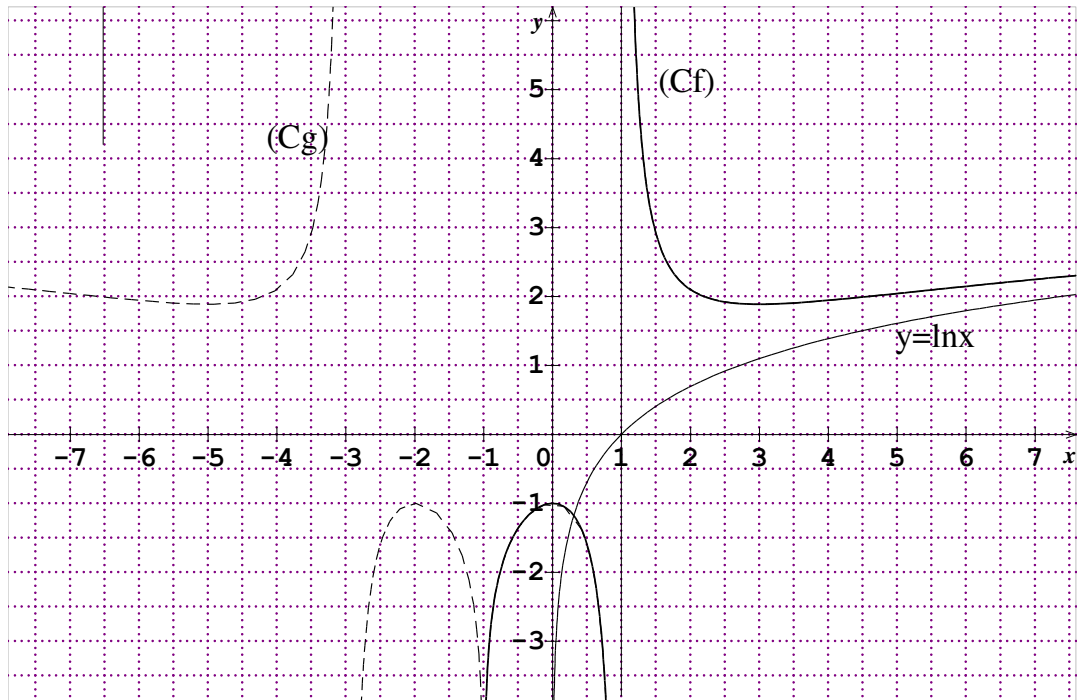
أ- تحقق من أن $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$ وتستنتج أن: (C_f) و (γ) متقاربان عند $+\infty$

ج- لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $x+1 > x$ ومنه $\frac{x+1}{x} > 1$ ،

لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > 0$ و $\frac{1}{x-1} > 0$ ومنه $f(x) - \ln x > 0$ ومنه (C_f) فوق (γ) على $]1;+\infty[$

(4)



(5) أ- $h(-2-x) = \frac{1}{|-x-1|-2} + \ln|-x-1| = \frac{1}{|x+1|-2} + \ln|x+1| = h(x)$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحنى (C_h)

ب - لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[\cup]-1;1[$ ، $|x+1| = x+1$ ومنه $h(x) = f(x)$

ج- رسم (C_h) : ينطبق على (C_f) في المجال $I =]-1;1[\cup]1;+\infty[$ و (C_h) متناظر بالنسبة للمستقيم (Δ)