

الواجب المنزلي رقم 02 في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

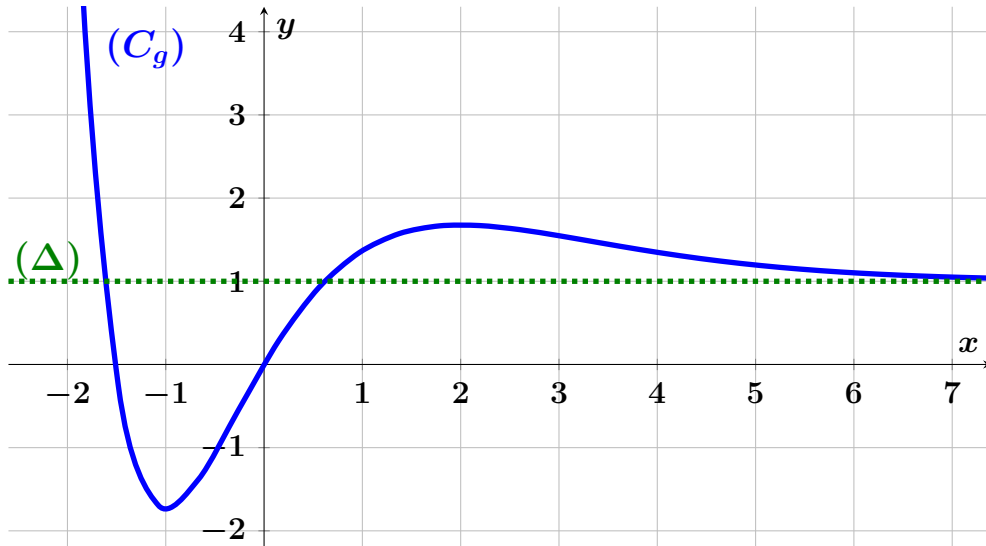
2/ استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلتين:

$9e^{-4x} - 10e^{-2x} + 1 = 0 \dots (E_1)$ و $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0 \dots (E_2)$

التمرين الثاني:

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x} + d$ حيث a, b, c و d أعداد حقيقية .
الدالة g تقبل قيمتين حديتين محليتين عند -1 و 2 .

في الشكل التالي: (C_g) هو التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،
(Δ) مستقيم مقارب لـ (C_g) في جوار $+\infty$ معادلته: $y = 1$ ، و المماس (T) لـ (C_g) عند المبدأ معامل توجيهه 2.



1/ براءة بيانية، أجب عن ما يلي:

أ/ عين نهايتي الدالة g عن $-\infty$ و $+\infty$.

ب/ عين: $g(0)$ ، $g'(-1)$ ، $g'(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \right)$

ج/ شكّل جدول تغيرات الدالة g ، مبينا إشارة مشتقتها.

2/ عين معادلة للمماس (T) .

3/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم استنتج قيمة d .

ب/ عبّر عن $g(0)$ بدلالة c و d ، ثم استنتج قيمة c .

ج/ عبّر عن $g'(x)$ بدلالة a و b و c .

د/ استنتج $g'(0)$ و $g'(-1)$ بدلالة a و b و c ، ثم عين قيمة كل من a و b .

4/ نقبل أن الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x} + 1$.

أ/ أثبت وجود عدد حقيقي وحيد α حل للمعادلة $g(x) = 0$ على المجال $]-1.52; -1.51[$.

ب/ شكّل جدول إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث:

I/ لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 - 4 \ln x$. جدول تغيراتها كما يلي:

x	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0	$1 - 2 \ln 2$	$+\infty$

1/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α

في المجال $]1.8; 1.9[$.

2/ عيّّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + \frac{4 \ln x}{x} + \frac{5}{x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفّر النتيجة بيانياً.

2/ أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ب/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3/ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب/ عيّّن اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4/ أ/ بين أن: $f(\alpha) = -2 + \frac{6}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$.

ب/ أنشئ بدقة المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

5/ ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2 - 2x + 4 \ln x + 5 + mx = 0$.

٧٤٣

د. حياة الواعظ الكنتري رقم ٥٢

٢٠٢٤ / ٢٠٢٥

بإذن مجموعة حلول المعادلة (E₁)

$$S_1 = \{0; \ln 3\}$$

$$(ln x)^4 - 10(ln x)^2 + 9 = 0 \dots (E_2)$$

$$\begin{cases} \ln x = -1 \\ \ln x = 1 \\ \ln x = 3 \\ \ln x = -3 \end{cases}$$

$$x = e^{-1} \text{ أو } x = e^1 \text{ أو } x = e^{-3} \text{ أو } x = e^3$$

بإذن مجموعة حلول المعادلة (E₂)

$$S_2 = \{e^{-3}; e^{-1}; e; e^3\}$$

المعادلة (E₃)

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x} + d$$

(1) - (1) تعيين الثوابت

$$y = 1 \text{ (1) مقارن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

(2) - (1) تعيين الثوابت

$$g(0) = 0$$

(3) (4) سؤال المبرهن

$$g'(-1) = 0$$

لأننا نعلم أن g تقبل قيمتها
منه يتبع ما يتبع عنه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2) = 0$$

الصفحة ١٤

المعادلة (E₁)

(1) - حل المعادلة

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \dots (1)$$

$$t = x^2 \text{ يصبح المعادلة (1)}$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$\Delta = 64$$

$$t_1 = 9 \text{ أو } t_2 = 1$$

$$x^2 = 9 \text{ أو } x^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

بإذن مجموعة حلول المعادلة (1)

$$S = \{-1; 1; 3; -3\}$$

(2) استنتاج حلول المعادلة

$$g e^{-4x} - 10 e^{-2x} + 1 = 0 \dots (E)$$

$$y = e^{4x} \text{ (1) مقارن}$$

$$g e^{-4x} e^{4x} - 10 e^{-2x} e^{4x} + 1 e^{4x} = 0$$

$$e^{4x} - 10 e^{2x} + 9 = 0$$

$$(e^x)^4 - 10(e^x)^2 + 9 = 0$$

بإذن حسب السؤال (1) نجد

$$\begin{cases} e^x = -1 \\ e^x = -3 \end{cases} \text{ ليس لها حل (لأن } e^x > 0 \text{)}$$

$$x = 0$$

$$x = \ln 3$$

$$e^x = 1 \text{ أو } e^x = 3$$

$$e^x = 1 \text{ أو } e^x = 3$$

$$g'(0) = (b-c)e^0 = b-c$$

$$g'(-1) = (-a - (2a-b) + b-c)e = (-3a + 2b - c)e$$

$$\begin{cases} g'(0) = b+1 \\ g'(-1) = (-3a + 2b + 1)e \end{cases}$$

$$g'(0) = b+1 = 2$$

$$b = 1$$

$$g'(-1) = (-3a + 3)e = 0$$

$$-3a + 3 = 0$$

$$a = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$g(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x} + 1$$

4- (1) نأخذ وجود عدد حقيقي α ، $g(x) = 0$

بحسب $g(x) = 0$ في $[-1.52; -1.51]$

نأخذ $g(x) = 0$ في $[-1.52; -1.51]$

مستوي و رئيسي فاك (مستوي فاك)

$$g(-1.52) \approx 0.04 > 0$$

$$g(-1.51) \approx -0.04 < 0$$

ذن الكاد $g(x) = 0$ تقبل حلاً

في $[-1.52; -1.51]$

1- جدول إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	+	+	-	+

(صحة التمثيل السابق)

الصحة 100%

$$g'(0) = 2$$

معامل توجيب الكاس (T) $g'(0) = 2$

1- جدول إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	+	+	-	-
$g(x)$	$+\infty$		$g(-1)$	$g(2)$	$-\infty$

2- (T) الكاس (T)

$$(T): y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$(T): y = 2x$$

$$\begin{cases} g'(0) = 2 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

3- (1) d $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = d$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax^2 + bx + c)e^{-x} + d]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{ax^2}{e^x} + \frac{bx}{e^x} + \frac{c}{e^x} + d \right]$$

$$= d$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 = d$$

$$g(0) = (a(0)^2 + b(0) + c)e^0 + d = 1$$

$$g(0) = c + d$$

$$c = -1$$

1- (1) d $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = d$

$$g'(x) = (2ax + b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2 + bx + c)$$

$$g'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + (b-c))e^{-x}$$

• التقدير الكفيل لـ (f) يقبل حامل هو الرتبة
مقارناً (معادلة $x=0$).

(2) -1- المستقيم المقارب لما يلي

$$f(x) = x - 2 + \frac{4 \ln x}{x} + \frac{5}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 \ln x}{x} + \frac{5}{x} \right) = 0$$

اذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$

مقارباً مماثل لـ (f) في جوار $+\infty$.

1- دراسة الوضعية النسبية لـ (f) و (Δ)

$$f(x) - (x - 2) = \frac{4 \ln x}{x} + \frac{5}{x} = \frac{4 \ln x + 5}{x}$$

نبدأ $x > 0$ اذن $x > 0$ و $(4 \ln x + 5)$ على

$$4 \ln x + 5 > 0$$

$$\ln x > -\frac{5}{4}$$

$$x > e^{-\frac{5}{4}}$$

$$4 \ln x + 5 = 0$$

$$4 \ln x = -5$$

$$\ln x = -\frac{5}{4}$$

$$x = e^{-\frac{5}{4}}$$

x	0	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$
$f(x) - y$		-	+
الوضع النسبي		(4), (Cf) نقاط التقاطع بالمعادلة $(e^{-\frac{5}{4}}; e^{-\frac{5}{4}} - 2)$	(Cf) خارج (4)

المسألة الثالثة

$$g(x) = x^2 - 1 - 4 \ln x$$

$$D_g =]0; +\infty[$$

1- كتابة الجواب

نبدأ على ايجاد $[1,8; 1,9]$ و g مستمرة و رتيبة تماماً (متزايدة تماماً)

$$g(1,8) \approx -0,11 < 0$$

$$g(1,9) \approx 0,04 > 0$$

اذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً

α في المجال $]1,8; 1,9[$

2- دراسة $g(x)$: من جدول التغير

x	0	1	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+

$$f(x) = x - 2 + \frac{4 \ln x}{x} + \frac{5}{x}$$

(II)

3- حساب النهاية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} + \frac{4 \ln x}{x} + \frac{5}{x} \right) = +\infty$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 2 + \frac{4 \ln x}{x} + \frac{5}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-2}{x} + \frac{4 \ln x + 5}{x} \right) = -\infty$$

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (4 \ln x + 5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty \end{array} \right]$$

المسألة الرابعة

١٩-٢٤ : $f(x)$ تبيين

$g(x) = 0$ ١٥
 $x^2 - 1 - 4 \ln(x) = 0$
 $4 \ln(x) = x^2 - 1$

١٦ : $f(x)$ تبيين

$f(x) = x - 2 + \frac{4 \ln(x)}{x} + \frac{5}{x} = x - 2 + \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{5}{x}$
 $= x - 2 + \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} + \frac{5}{x} = x - 2 + x + \frac{4}{x}$

$f(x) = 2x - 2 + \frac{4}{x}$

١٧ : $f(x)$ $1.8 < x < 1.9$

$\frac{1}{1.9} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1.8}$ (دو)

(١) $\frac{4}{1.9} < \frac{4}{x} < \frac{4}{1.8}$ (دو)

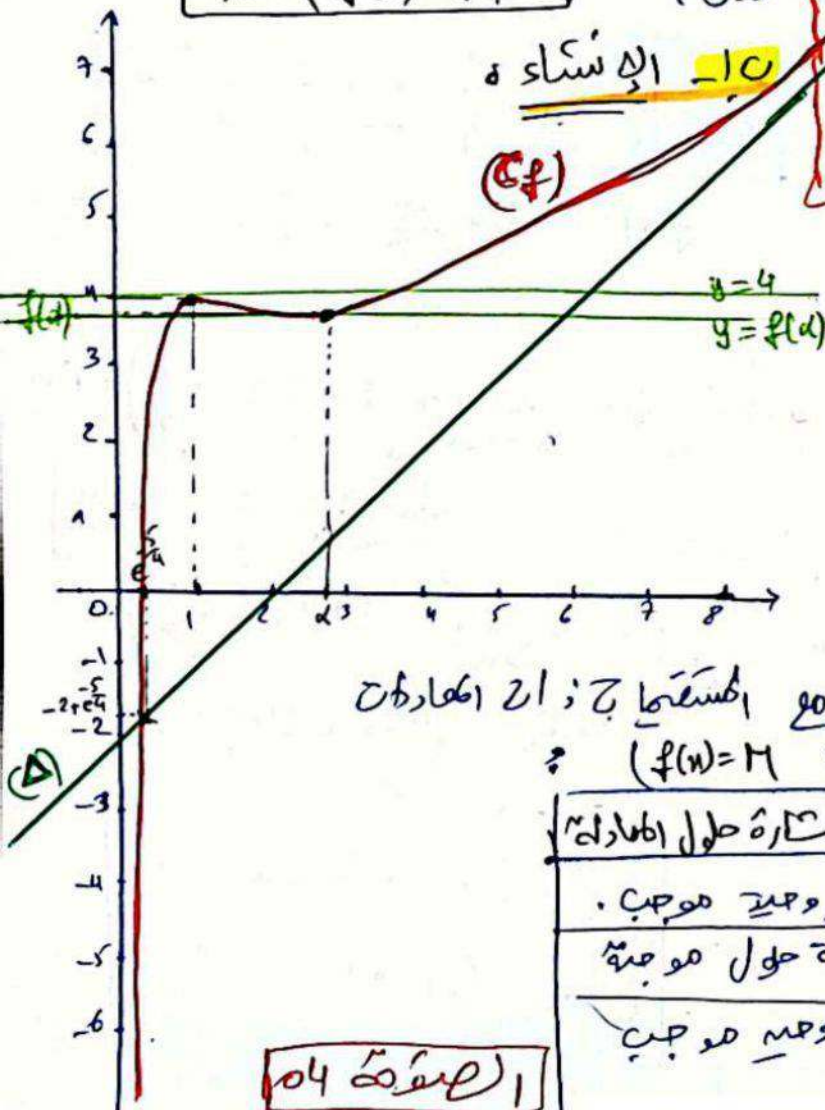
(٢) $2(1.8) - 2 < 2x - 2 < 2(1.9) - 2$ (دو)

$2(1.8) - 2 + \frac{4}{1.9} < 2x - 2 + \frac{4}{x} < 2(1.9) - 2 + \frac{4}{1.8}$ (دو)

$3.71 < f(x) < 4.02$ (دو)

١٨ : $f(x)$ تبيين

(٢٤)



(٢٤) (٢٤)

$f'(x) = 1 + 4\left(\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}\right) + 5\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
 $= \frac{x^2 + 4(1 - \ln x) - 5}{x^2}$
 $= \frac{x^2 + 4 - 4 \ln x - 5}{x^2} = \frac{x^2 - 1 - 4 \ln x}{x^2}$
 $= \frac{g(x)}{x^2}$

١٩ : $f(x)$ تبيين

(دو) $f(x)$ $g(x)$ $(x^2 > 0)$ (دو)

١٩ : $f(x)$ تبيين $[0, 1]$ و $[1, +\infty[$ و $[+\infty, +\infty[$ (دو)

$f(x) = 4$

x	0	1	α	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+
$f(x)$			4	$+\infty$
$f(x)$				$+\infty$

٢٠ : $f(x)$ تبيين

$x^2 - 2x + 4 \ln x + 5 + mx = 0$ ١٥
 $x^2 - 2x + 4 \ln x + 5 = -mx$ (دو)
 $\frac{x^2 - 2x + 4 \ln x + 5}{x} = -m$ (دو)
 $x - 2 + 4 \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{x} = -m$ (دو)
 $f(x) = -m$ (دو)

٢٠ : $f(x)$ تبيين $(f(x) = M \iff M = -m)$ (دو)

m $f(x)$	$M = -m$
$m > -f(x)$	$-m < f(x)$
$-4 < m < -f(x)$	$f(x) < -m < 4$
$m \leq -4$	$-m \geq 4$