

الموضوع الثاني

التمرين الأول

بين صحة أو خطأ كل من الجمل التالية مع التعليل:

1. مهما يكن العدد الحقيقي : $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

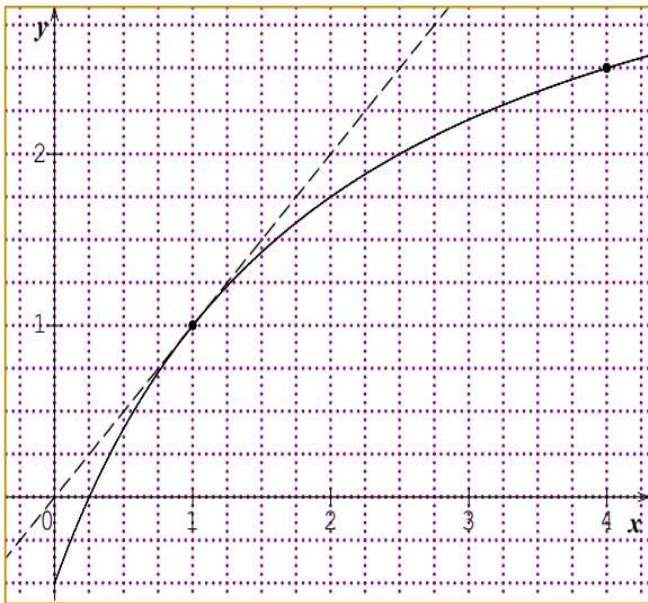
2. $\ln(3e^\pi) = \pi + \ln 3$

3. الدالة $x \mapsto e^{-2x}$ هي حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$

4. المتراجحة $e^{1-2x} > e^{x+1}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 4) = 2 \ln 2$

التمرين الثاني



f معرفة على $[0; 4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ و (C)

تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1. أستنتج اتجاه تغير f ، وتحقق أن المنصف الأول يمس

المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1.

2. نعرف المتتالية (u_n) بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- أنقر الشكل ومثل على محور الفواصل الحدود: u_0 ،

u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء).

- ب- أعط تخمينا فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، وتخمينا حول تقاربها .
3. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n \leq 4$
- ب- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ، واستنتج أنها متقاربة .
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$
- أ- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها ، وأحسب حدها الأول .
- ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .
- ت- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- ث- أثبت أن من أجل $n \in \mathbb{N} : u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{n+1}{6}(8+n)$

التمرين الثالث :

- 😊 لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$
- أدرس تغيرات الدالة g .
 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0,38; -0,37[$.
 - استنتج إشارة $g(x)$.
- 😊 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول)
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} : f'(x) = g(x)$
 - أدرس تغيرات الدالة f .
 - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
 - أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) .
 - بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .
 - بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

بالتوفيق

انتهى

ترقبوا الحلول قريبا إن شاء الله

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:

تبين صحة أو خطأ الجمل مع التعليل:

$$1. \text{ خطأ لأن : } \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x (e^x - e^{-x})}{e^x (e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

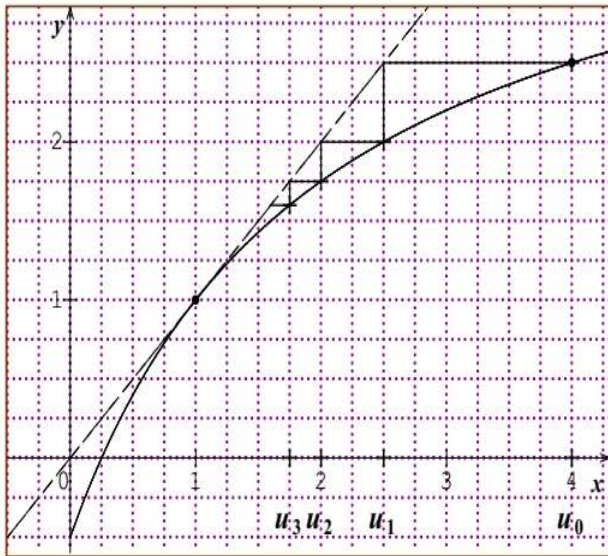
$$2. \text{ صحيح لأن : } \ln(3e^\pi) = \ln 3 + \ln e^\pi = \ln 3 + \pi \quad \text{لأن : } \ln e^\pi = \pi$$

$$3. \text{ خطأ لأن : حلول أي معادلة تفاضلية } y' = 2y \text{ هي من الشكل : } y = f(x) = ke^{2x} \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي كفي .}$$

$$4. \text{ خطأ لأن : المتراجحة } e^{1-2x} > e^{x+1} \text{ مجموعة حلولها هي : } S =]-\infty; 0[$$

$$5. \text{ صحيح لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 4) = \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$$

حل التمرين الثاني:



f معرفة على $[0;4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ و (C) تمثيلها البياني

في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1. إستنتاج اتجاه تغير f ، والتحقق أن المنصف الأول يمس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1.

الدالة f متزايدة، نثبت أن المعادلة تقبل العدد 1 حلا مضاعفا

لدينا $f(x) = x$ تكافئ $4x - 1 = x(x + 2)$ ويكافئ

$4x - 1 = x^2 + 2x$ ويكافئ $x^2 - 2x + 1 = 0$ أي $(x - 1)^2 = 0$ ومنه

$$x = 1$$

2. نعرف المتتالية (u_n) بـ :

$$\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- نقل الشكل وتمثيل الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3 للمتتالية (u_n) (أنظر الشكل)

ب- إعطاء التخمين فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (u_n) والتخمين حول تقاربها .

من الشكل لدينا : $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ ومنه نضمن ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3. أ - البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n \leq 4$

لدينا أولا $1 \leq (u_0 = 4) \leq 4$ ومنه محققة ثانياً نفرض صحة الخاصية $1 < u_n \leq 4$ ونبرهن صحة الخاصية $1 < u_{n+1} \leq 4$

لدينا $(1 < u_n \leq 4)$ فرضية التراجع والدالة f متزايدة على المجال $[0; 4]$ فهي متزايدة على المجال $[1; 4]$ ومنه :

$$(4) f(1) < f(u_n) \leq f(4) \text{ أي : } 1 < u_{n+1} \leq 2,5 \leq 4 \text{ ومنه : من أجل كل عد طبيعي } n \text{ فإن } 1 < u_n \leq 4$$

ب- إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة ، واستنتاج أنها متقاربة .

$$\text{نحسب الفرق } u_{n+1} - u_n : \quad u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$$

$0 < 3 < u_n + 2 \leq 6$ و $-(u_n - 1) \leq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ أي (u_n) متناقصة ولدينا (u_n) محدودة فهي متقاربة

4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ- إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحساب حدها الأول .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{4u_n - 1 - u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 1}$$

لنثبت أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثابت :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{u_n - 1} \left(\frac{u_n + 2}{3} - 1 \right) = \frac{1}{u_n - 1} \left(\frac{u_n - 1}{3} \right) = \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4 - 1} = \left[\frac{1}{3} \right] \text{ إذن متتالية هندسية أساسها } r = \left[\frac{1}{3} \right] \text{ وحدها الاول هو } r$$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n ، واستنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \left[\frac{1}{3}(1+n) \right]$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n : نعوض عبارة في ونبسط : $u_n = \frac{1+v_n}{v_n} \Leftrightarrow v_n u_n - v_n = 1 \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ ومنه نعوض

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{3}(1+n)}{\frac{1}{3}(1+n)} \quad \text{ومنه} \quad \boxed{u_n = \frac{4+n}{1+n}}$$

ت- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4+n}{1+n} = 1$

ث- إثبات أن من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{n+1}{6}(8+n)$

لدينا مما سبق من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n u_n = 1 + v_n$

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \underbrace{1+1+\dots+1}_n + \underbrace{(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}_{\text{حساب يد}} \quad \text{ومنه}$$

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = (n+1) + \frac{1}{2}(n+1) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1+n) \right) \quad \text{ومنه}$$

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{6}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(8+n) \quad \text{ومنه وهو المطلوب}$$

التمرين الثالث :

😊 لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. دراسة تغيرات الدالة g .

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^{-x} + 2] = -\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{-x} + 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} - e^{-x} + 2 \right) = 2$$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، الدالة g قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = (2-x)e^{-x}$ و منه إشارة $g'(x)$

من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	2

2. تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$.

الدالة g مستمرة ومنتزيدة تماما على المجال $]-\infty;2[$ ومنه على المجال $]-0,38;-0,37[$ وبما أن

$g(-0,38) \times g(-0,37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

3. استنتج إشارة $g(x)$.

نلخص النتائج في الجدول :

⊗ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1. التبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2 = g(x)$$

لدين من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

2. دراسة تغيرات الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ولدينا أيضا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. التبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل

للمنحنى (C_f) عند $(+\infty)$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) .

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x + 1)$ ومنه لدينا :

$$[f(x) - (2x + 1)] = -xe^{-x}$$

ومنه إشارة الفرق هي عكس إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

5. إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = g'(x)$ ومنه

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

نلاحظ من الجدول أن $f''(x)$ تتعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2; 5 - \frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى

6. إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$.

لدينا $g(\alpha) = 0$ تكافئ $(\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$ نستخرج قيمة $e^{-\alpha}$ ونعوذها في الدالة $f(\alpha)$ فتصبح :

$$f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha} = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

ومنه نستطيع رسم (C_f) كما يلي (إجابة إضافية)

