

الواجب المنزلي رقم 01 في مادة الرياضيات

يصاد يوم: 07 أكتوبر 2025

القسم: سنتا ثالثة رياضيات

التمرين 01

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,56; 1,57[$.

3. عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج إشارة $g(x^2)$ على $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^2 - 1}$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{2xg(x^2)}{(x^2 - 1)^2}$

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3. عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\alpha}} \left(\frac{f(x) - f(\sqrt{\alpha})}{x - \sqrt{\alpha}} \right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

4. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^4)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

5. مثّل بيانيا (C_f) .

III. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $h(x) = (f(x))^2$

- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ، احسب $h'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين 02

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - \sqrt{1 + x^2}$

وليكن (C_f) هو المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $\sqrt{1 + x^2} - x > 0$

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3. أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) ، ثم حل بيانيا المتراجحة: $f(x) > 2x - 1$

الجزء الثاني:

لتكن الدالة المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ :

$$\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} & , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة.

1. بين أن : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. احسب : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} g(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. أ- بين أنه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ يكون : $g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

ج- أنشئ (C_g) في معلم آخر.

التمرين 03

I. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, 7[\cup]-1, -\infty]$ ، (C_f) تمثيلها البياني يقبل مستقيمان مقاربان (Δ_1) و (Δ_2) كما هو مبين في الشكل :

- بقراءة بيانية عيّن :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x + 7)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{f(x)-3}{x-7}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، $f'(-2)$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x)+3}{x-3}\right)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x)+3}{x-3}\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4. بين أن : $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x^2-9} = \frac{1}{4}$

II. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$$g(x) = \frac{-2x^2 - 9x - 9}{x + 1}$$

- بين أن : $g'(x) = \frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$ ، ثم ادرس تغيرات الدالة g .

III. لتكن الدالة h المعرفة كما يلي :

$$h(x) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{x}\right); & x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ \sqrt{x^2 + 4x - 2}; & x \geq 0 \end{cases}$$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني .

1. من أجل كل x من $]0, 1[\cup]-1, -\infty]$ و باستعمال مشتقة دالة مركبة استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة h على يمين العدد 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .

3. من أجل كل $x \geq 0$ بين أن المستقيم $(D): y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_h) .

التحضير النموذجي للواجب المنزلي 01 في مادة الرياضيات .

التحضير 01

$f(x) = x^4 + \frac{1}{x^2-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. II

1. حساب النقاط :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^4 + \frac{1}{x^2-1} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^4 + \frac{1}{x^2-1} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x^4 + \frac{1}{x^2-1} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x^4 + \frac{1}{x^2-1} \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^4 + \frac{1}{x^2-1} \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^4 + \frac{1}{x^2-1} \right) = +\infty$

2. P. 1 من الجدول كل x مع D_f : لدينا

$f'(x) = 4x^3 - \frac{2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^3(x^2-1)^2 - 2x}{(x^2-1)^2}$

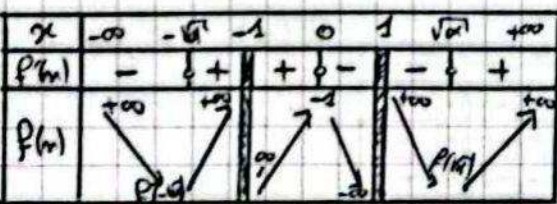
$= \frac{2x(2x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 1)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{2xg(x^2)}{(x^2-1)^2}$

ب. جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$g(x^2)$	+	-	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	+	+	+	-	-	+

إشارة $f'(x)$:



$f(-\sqrt{2}) \approx 4,22$; $f(\sqrt{2}) = 4,22$

3. لدينا :

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = f'(\sqrt{2}) = 0$

التفسير الهندسي : (ق) يقبل عن النقطة

ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ مماسا موازيا لخط محور الفواصل.

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$, $D_g = \mathbb{R}$. I

1. دراسة تغيرات الدالة g :

حساب النقاط :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$

تحليل عبارة المشتقة :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$g'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x^2 - 4x + 1)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

الدالة g متزايدة تماما على كل من $]-\infty; \frac{1}{3}]$

و $[1; +\infty[$ و متناقصة تماما على $[\frac{1}{3}; 1]$ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	$-\frac{19}{27}$	1	$+\infty$

2. الدالة g مستمرة و متزايدة تماما

على المجال $]1,56; 1,57[$

$g(1,56) \approx -0,02$

3 :

$g(1,57) \approx 0,02$

ومنه $g(1,56) \cdot g(1,57) < 0$

إذن حسب مرقم المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $1,56 < \alpha < 1,57$

3. إشارة $g(x^2)$ و $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x^2)$	+	0	-	+

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

التحريك ٥٨ :

الجزء الأول :

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$$

1.P.1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{1+x^2}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (1+x^2)}{x + \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

التفسير البديهي : (f) يقترب من صفر عند $+\infty$

بـ W_n - بـ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x - \sqrt{1+x^2}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x - \sqrt{1+x^2})(-x + \sqrt{1+x^2})}{-x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{-x + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

إذن : المستقيم (d) مقارب (f) عند $-\infty$

1.P.2. لدينا من أجل كل x حقيقي $x \geq 0$:

$$1+x^2 > x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > x$$

وبما $1 > 0$ (صحيح) و

ولدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $\sqrt{1+x^2} > x$ حقيقة و

إذن : من أجل كل x حقيقي x :

$$\sqrt{1+x^2} > x$$

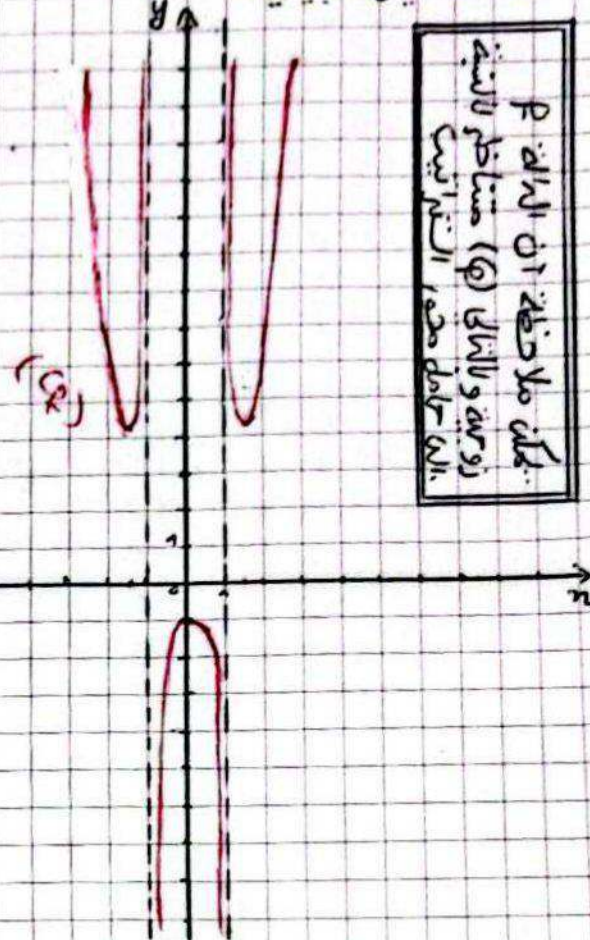
$$\sqrt{1+x^2} - x > 0 \quad \text{بـ } \delta$$

$$4. \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^4]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^4] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^4 - 1} \right) = 0$$

التفسير البديهي : التفسير البديهي : x^4 مقارب (f) عند $+\infty$

5. التفسير البديهي :



$$III. R(x) = (f(x))^2 ; D_R = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

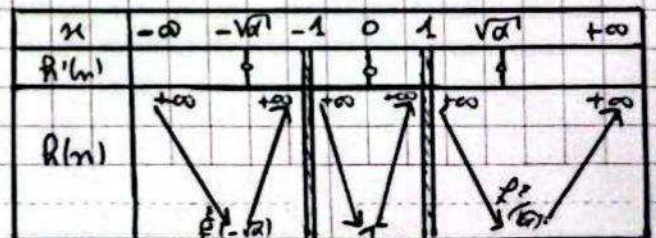
من أجل كل x في D_R :

$$R'(x) = 2f'(x)f(x)$$

- إشارة $R'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{1}$	-1	0	1	$\sqrt{1}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-	-	+	+
$f(x)$	+	+	-	-	+	+	+
$R'(x)$	-	+	-	+	-	+	+

حدود تغيرات الدالة R :



الجزء الثاني:

$$D_g =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} \\ = f(\tan x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

1. نبيان أن:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$$

لأننا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\tan x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2}) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$$

التفسير الرسومي:

(Cg) يقبل مسقيما متقاربا عوديا طولية

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

لأننا:

$$g(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

ب. دراسة تغيرات الدالة g:

من أجل كل $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ الدالة g قابلة للاشتقاق

ب. جدول تغيرات الدالة P:

من أجل كل $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$P'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}$$

مما سبق: $\sqrt{1+x^2} - x > 0$

الدالة f متزايدة دائما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
P'(x)	-	+
P(x)	$-\infty$	$+\infty$

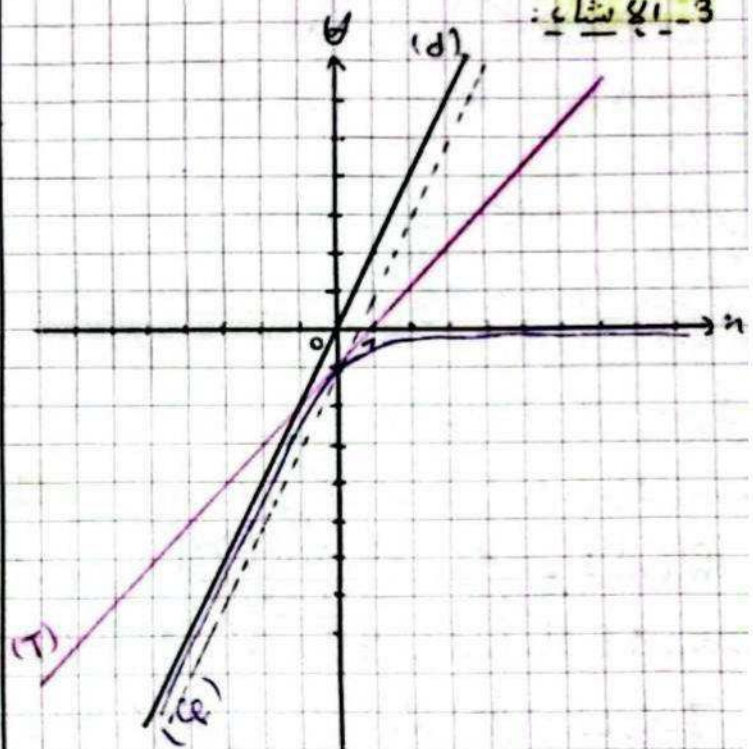
٣. معادلة المماس (T):

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f(0) = -1 \quad \text{و} \quad f'(0) = 1$$

$$(T): y = x - 1$$

3. الإنشاء:



الحل البديهي المتراجحة: $f(x) > x - 1$

$$S =]-\infty; 0[$$

(فواصل نقاط (p) الواقعة فوق المستقيم الذي يوازي (d) ويشمل النقطة (0; -1))

$$g'(x) = \frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2} \quad \text{II. تبين أن :}$$

$$g'(n) = \frac{1 - \sin n}{\cos^2 n} \quad \text{حيث :}$$

لبيان أن ذلك هو حقيقي x مختلف عن 1 :

$$g'(x) = \frac{(-4x-9)(x+1) + 2x^2 + 9x + 9}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 - 4x}{(x+1)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
x	-	-	-	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$g'(x)$	-	0	+	+	-

الآن g متزايدة كلما عكس المتكافئ

$[-\infty; -2]$ و $[0; +\infty]$ و متزايدة

كلما عكس $[-2; -1]$ و $[-1; 0]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+	-
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{-2x^2 - 9x - 9}{x+1} \right) = +\infty$$

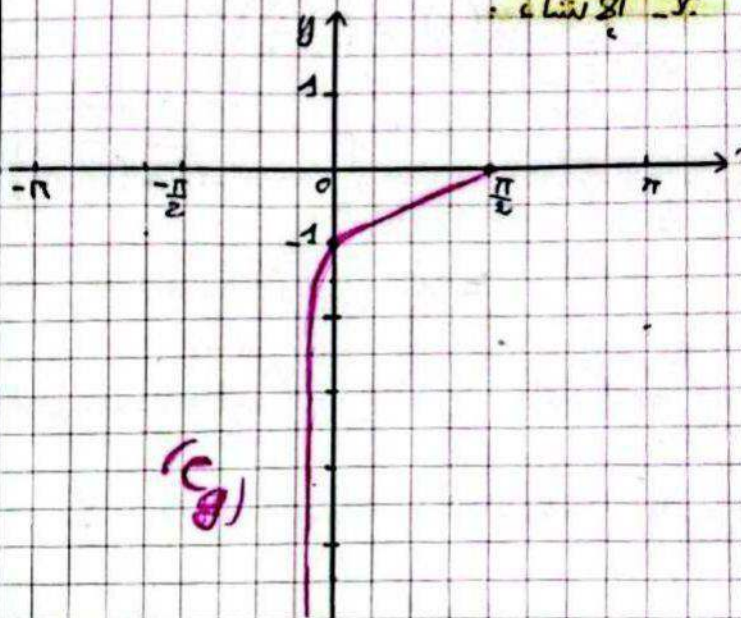
$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$$

و من g متزايدة كلما عكس $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

جدول التغيرات :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	$-\infty$	0

5. الإنشاء :



التحريه 03

I. بقراءة بيانية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ;$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x + 7] = 0$$

$$f'(-2) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - 0}{x - 1 - 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - 1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) - 3}{x - 7} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 3}{x - 3} = \frac{0 + 3}{4 - 3} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 3}{x - 3} = \frac{1 + 3}{2 - 3} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{1}{x - 3} \cdot \frac{f(x)}{x + 3} \right]$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{0 + 3}{-3 + 1} = \frac{1}{4}$$

2. دراسة قابلية التقاطق لـ R على

نقطة الصفر :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - R(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} - 2}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \times \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} \right) = +\infty$$

التفسير الهندسي : (C) يقبل نصف مماس

عمودي على مماس نقطة الصفر .

3. تبين أن (D) مقارب مائل لـ (C)

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x} - 2 - x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - 2 - x)(\sqrt{x^2 + 4x} + 2 + x)}{\sqrt{x^2 + 4x} + 2 + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 4 - x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + 2 + x} = 0$$

و (D) مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$

$$R(x) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{x}\right); x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\\ \sqrt{x^2 + 4x} - 2; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{III}$$

1. من أجل كل x من $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

أشارة $g'\left(\frac{1}{x}\right)$: (أشارة $g(x)$)

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0
$g'\left(\frac{1}{x}\right)$	+		+	-

و بما أن $-\frac{1}{x^2} < 0$ فإن :

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0
$h'(x)$	-		-	+

ومنه : الدالة h متناقصة على كل من

$]-\infty; -1[$ و $]-1/2; -1[$ و متزايدة

فعلما على المجال $]-1/2; 0[$.

أ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0
$h'(x)$	-		-	+
$h(x)$	$-\infty$	$-\infty$	-1	$+\infty$

جيد :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = g; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

• بوضع : $t = \frac{1}{x}$ فإن $x \leq -1$ و $x \geq -1$

و $x \geq -1$ و $x \leq -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{t \rightarrow -1} g(t) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{t \rightarrow -1} g(t) = -\infty$$