



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

- I/** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب: $Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = -1 + i$ و $Z_D = -Z_A$.
- 1/** أكتب كلا من العددين Z_A و Z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي لكل من Z_B و Z_D .
- ب/** استنتج أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) معينا عناصرها المميزة.
- 2/** أكتب العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- ب/** عين صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.
- 3/** بين أن مجموعة النقط M ذات اللاحة Z التي تحقق: $\bar{Z} = Z_A e^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي يسمح $\mathbb{R}$ هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ نضع في وعاء عشرة كريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس، مرقمة بالأعداد المركبة:

$$Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, 3i, -3i, 2, -2, \sqrt{5}, -\sqrt{5} .$$

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من هذا الوعاء.

- 1/** أحسب احتمال الحدثين: E «الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا حقيقيا صرفا»
 F «الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا مركبا له عمدة θ حيث: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ »
- 2/** أ/ أحسب $P_F(E)$.
ب/ هل الحدثان E و F مستقلان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

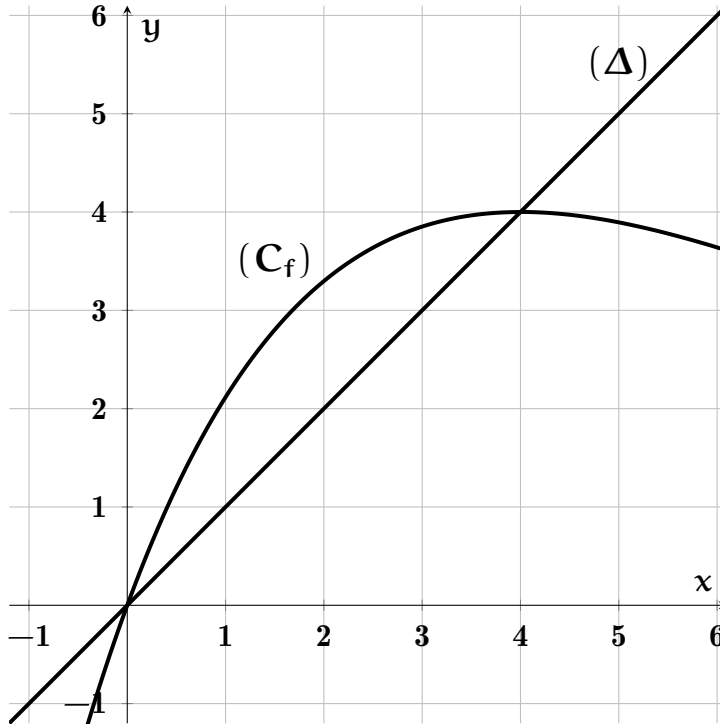
- 1/** عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد: $M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7 . (لاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n^2 + 4n + 3 = (n + 2)^2 - 1$)
- 2/** أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
- 3/** ليكن العدد الطبيعي T_n الذي يُكتب في نظام العد ذو الأساس خمسة بالشكل: $T_n = \underbrace{111\dots 1}_{(n+1) \text{ رقمًا}}$.
- أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n = 5^{n+1} - 1$ ، ثم استنتج أن: $\text{PGCD}(T_n; 5^n) = 1$.
- ب/ ليكن m عددا طبيعيا. بين أن: $(4T_n \equiv m [7])$ يكافئ $(T_n \equiv 2m [7])$.



ج/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $N = T_{2024} + 2T_{1445}$ على 7 .

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5^n x + T_n y = 1$. (E_n) .
• بين أن المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$.

في الشكل المقابل المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث:

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
 $f(x) = x e^{1-\frac{1}{4}x}$

و (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.

1/ ا/ بقراءة بيانية، بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; 4]$ فإن: $f(x) \in [0; 4]$.

ب/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .

(دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء)

ج/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

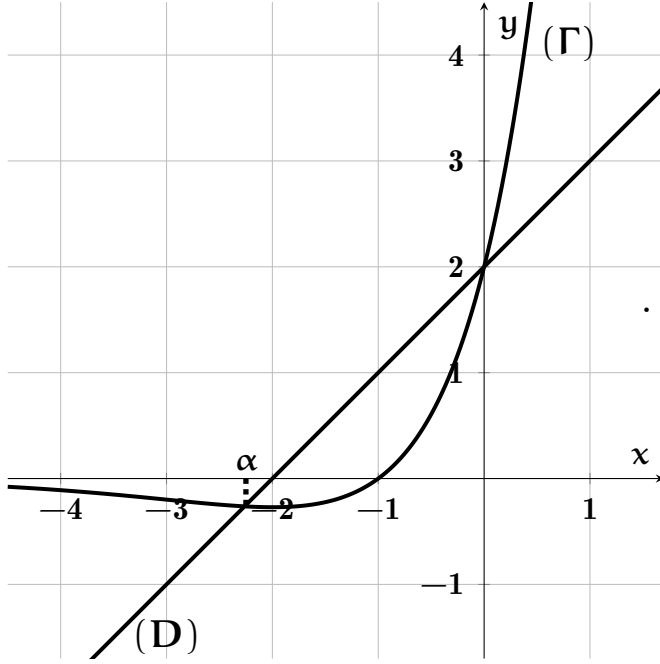
4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ب/ بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 4$.



التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ في الشكل المقابل: (Γ) هو التمثيل البياني للدالة

المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto (2x + 2)e^x$

و (D) هو المستقيم ذو معادلة $y = x + 2$.

(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما 0 و α

حيث $-2.3 < \alpha < -2.2$.

1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ إشارة:

$$g(x) = -x - 2 + 2(x + 1)e^x$$

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x - 1) \geq 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = 2e^x g(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معينتا فاصلتيهما.

4/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ثم أثبت أنه المماس الوحيد الذي يمر من المبدأ.

5/ أ/ أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: 2cm)

ب/ عين قيم العدد الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة.

6/ أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_0^{\ln 2} x \cdot e^x (e^x - 2) dx = \frac{1}{4}(5 - 8 \ln 2)$.

ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $x = 0$ و $x = \ln 2$.

و $y = x$.

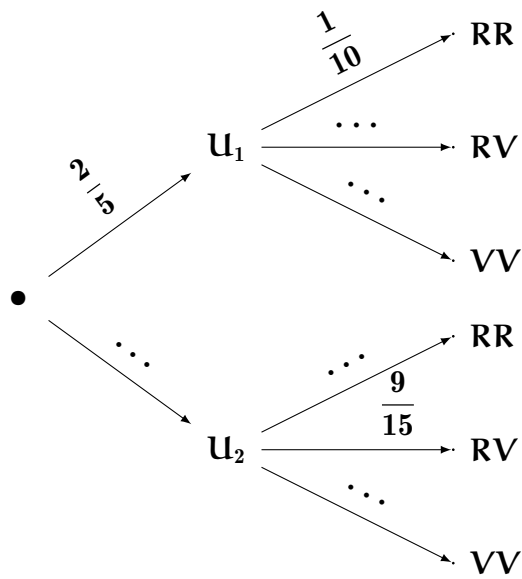
انتهى الموضوع الأول.



الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 كرتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي صندوق U_2 ثلاث كريات حمراء و كرتين خضراوين؛ بحيث كل الكريات متماثلة، لا يمكن التفريق بينها باللمس. نسحب ثلاث كريات كما يلي: نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 ونسجل لونها؛ فإذا كانت حمراء نعيدها إلى الصندوق U_1 ثم نسحب كرتين في آن واحد من U_1 ، وإذا كانت خضراء نضعها داخل الصندوق U_2 ثم نسحب كرتين في آن واحد من U_2 .



1/ أنقل ثم أتمم شجرة الاحتمالات المقابلة:

(نرمز للكرات الحمراء بـ R وللخضراء بـ V)

2/ أحسب احتمال الحدثين التاليين:

A «الكرات الثلاث المسحوبة من نفس اللون»

B «الحصول على كرية حمراء على الأقل»

3/ بيّن أن: $P_A(U_2) = \frac{3}{4}$.

4/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الخضراء المتبقية في الصندوق U_1 .

ا/ برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ، 2 و 3 .

ب/ عيّّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله

الرياضياتي $E(X)$.

ج/ أحسب الاحتمال: $P(C_3^X = 3)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، I و C لواحقها على الترتيب: $Z_A = -2$ ، $Z_I = -1$ و $Z_C = i$.

(γ) الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1 ، و B نقطة من (γ) حيث: $\frac{AB}{AO} = \frac{\pi}{8}$.

1/ علّم النقط A و I و C ، ثم أنشئ الدائرة (γ) . (الوحدة 2cm)

2/ استنتج طويلة العدد المركب $Z_B + 1$ وبين أن عمدة له هي: $\frac{\pi}{4}$ ، ثم استنتج الشكل الجبري لـ Z_B .

3/ أثبت أن العدد $\frac{Z_B + 1}{i + 1}$ حقيقي. ماذا تستنتج؟

II/ نرفق بكل نقطة M تختلف عن I ذات اللاحة Z النقطة M' ذات اللاحة Z' حيث: $Z' = \frac{i(Z + 2)}{Z + 1}$.

1/ ا/ أثبت أن $\arg(Z') = \arg(Z) + \frac{\pi}{2}$ حيث يكون $\arg(Z)$ تخيليا صرفا. ب/ عين مجموعة النقط M بحيث يكون $\arg(Z')$ تخيليا صرفا.



2/ /أ أثبت أن $Z' - i = \frac{i}{Z + 1}$.

ب/ نضع $Z = -1 + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi; \pi]$.

- استنتج أنه عندما تمسح النقطة M الدائرة (γ) فإن النقطة M' تمسح دائرة (γ') يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ /أ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16.

ب/ استنتج أن: $2009^{8001} \equiv 2009 [16]$.

2/ نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالتالي:

$$\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

ب/ بين بالاسترجاع القسمة على العدد أن: $u_{n+1} = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1$
 ج/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n مضاعف 5 .

3/ /أ تحقق أن: $u_3 = 2009^{250} - 1$.

ب/ استنتج أن: $2009^{250} \equiv 1 [625]$ و $2009^{8001} \equiv 2009 [625]$.

4/ /أ لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة.
 برهن أنه إذا كان a مضاعفا لـ b و c وكان $\text{PGCD}(b; c) = 1$ فإن a مضاعف للجداء bc .
 ب/ بين أن: $2009^{8001} - 2009$ يقبل القسمة على 10000.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

1/ أدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ يكون: $g(x) > 0$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 ; & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ /أ بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.



- 2/ 1/ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0 ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
 ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ يكون: $f'(x) = g(x) + 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- 3/ أحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: 2cm)
- 4/ 1/ بين أن الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $F(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.
 ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$ و $y = 0$.
- 5/ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
 1/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $u_n = e^{f(n)-n-1}$.
 ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً. [يمكنك الاستفادة من نتيجة السؤال (II / 2 / ب)]
 ج/ بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ ، ماذا تستنتج؟

انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:
 (تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)



☺☺ بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا ☺☺

الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية - ماي 2024 - في مادة الرياضيات (شعبة الرياضيات):

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

1/ كتابة الأعداد على الشكل الأسّي:

لدينا: $|Z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(Z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ إذن:

$$\bullet Z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

ولدينا: $|Z_C| = \sqrt{2}$ و بوضع $\arg(Z_C) = \theta$ فإن:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{وبالتالي:} \quad \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\bullet Z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

إذن:

$$\bullet Z_B = \overline{Z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = Z_B.$$

الإستنتاج:

$$\bullet Z_D = -Z_A = e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = Z_D$$

ب/ الإستنتاج:

لدينا: $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = |Z_D| = \sqrt{2}$ ،

إذن: النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$.

2/ كتابة العدد على الشكل الأسّي:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1 - i - 1 - i}{-1 + i - 1 - i} = \frac{-2i}{-2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

طبيعة المثلث ABC:

من الشكل الأسّي نستنتج أن: $k \in \mathbb{Z}$; $\arg(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ وأن: $AB = AC$ ، إذن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين.

ب/ صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$:

ولتكن M ذات اللاحقة Z ، وذلك معناه أن: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$

وعليه: $Z - Z_B = Z_C - Z_A$ إذن:

$$Z = Z_C - Z_A + Z_B = -1 + i - 1 - i + 1 - i = -1 - i = Z_D$$

إذن صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ هي النقطة D .

الإستنتاج:

لدينا $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ فالرباعي ABDC متوازي أضلاع،

وبما أن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين،

إذن الرباعي ABDC مربع.

3/ مجموعة النقط:

$$\overline{Z} = Z_A e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$$

لدينا:

$$Z = \sqrt{2}e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\theta)} = \sqrt{2}e^{i\theta'}; \theta' = -\frac{\pi}{4} - \theta$$

لما θ يسمح $\mathbb{R}$ فإن θ' يسمح $\mathbb{R}$ كذلك، وعليه تُصبح العلاقة:

$$OM = \sqrt{2} \quad \text{أي:} \quad |Z| = \sqrt{2} \quad \text{وذلك معناه أن:} \quad Z = \sqrt{2}e^{i\theta'}; \theta' \in \mathbb{R}$$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها

$\sqrt{2}$ وهي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ وعاء به عشر كريات ونسحب عشوائيا منه كريتين في آن واحد،

إذن عدد الحالات الكلية للسحب هو: $C_{10}^2 = 45$.

1/ حساب الاحتمالات:

الحدث E : عدد الأرقام الحقيقية الصرفة في الوعاء هو 4 إذن:

$$\bullet P(E) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

الحدث F : عدد مركب له عمدة تنتمي إلى المجال: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ معناه

جزؤه الحقيقي موجب، وعددها في الكيس هو 6 إذن:

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n = 5^{n+1} - 1$.

الإستنتاج: لدينا $4T_n = 5^{n+1} - 1$ ومنه $5 \times 5^n - 4 \times T_n = 1$ ،
إذن حسب مبرهنة بيزو: $\text{PGCD}(5^n; T_n) = 1$.

ب/ إثبات التكافؤ: ليكن m عددا طبيعيا:

$$T_n \equiv m [7] \iff 4T_n \equiv 4m [7] \iff 8T_n \equiv 2m [7] \iff 8T_n \equiv 2m [7] \iff T_n \equiv 2m [7] \text{ يكافئ}$$

ج/ استنتاج باقي قسمة العدد N على 7 :

$$\text{لدينا: } 4T_{2024} = 5^{2025} - 1 \text{ وبما أن: } 2025 = 337(6) + 3$$

$$\text{فإن: } 5^{2025} \equiv 6 [7] \text{ وبالتالي: } 4T_{2024} \equiv 5 [7] \text{ إذن: } T_{2024} \equiv 10 [7]$$

$$\text{أي: } T_{2024} \equiv 3 [7] \dots (1)$$

$$\text{ولدينا: } 4T_{1445} = 5^{1446} - 1 \text{ وبما أن } 1446 = 241(6)$$

$$\text{فإن: } 5^{1446} \equiv 1 [7] \text{ وبالتالي: } 4T_{1445} \equiv 0 [7] \text{ إذن: } T_{1445} \equiv 0 [7]$$

$$\text{ومنه: } 2T_{1445} \equiv 0 [7] \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد: $N \equiv 3 [7]$ إذن باقي قسمة N على 7 هو 3 .

4/ تبيان أن المعادلة $5^n x + T_n y = 1$ تقبل حولا:

لدينا $\text{PGCD}(5^n; T_n) = 1$ إذن المعادلة (E_n) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

$$\text{حل المعادلة } (E_2) \text{ : لدينا: } 5^2 = 25 \text{ ولدينا: } T_2 = \frac{1}{4}(5^3 - 1) = 31$$

$$\text{لدينا حسب السؤال 3/أ: } \begin{cases} 5^2 x + T_2 y = 1 \\ 5^2(5) + T_2(-4) = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد:}$$

$$5^2(x-5) + T_2(y+4) = 0 \text{ ومنه: } 5^2(x-5) = -T_2(y+4) \dots (*)$$

T_2 يقسم $5^2(x-5)$ وبما أن: $\text{PGCD}(5^2; T_2) = 1$ فإن: T_2 يقسم $x-5$

$$\text{أي: } x-5 = T_2.k ; k \in \mathbb{Z} \text{ إذن: } x = 31k + 5 ; k \in \mathbb{Z}$$

بالتعويض في (*) نجد: $5^2.31k = -31(y+4)$ ومنه: $5^2.k = -y-4$

$$\text{إذن: } y = -25k - 4 ; k \in \mathbb{Z} \text{ إذن حلول المعادلة } (E_2) \text{ هي الثنائيات:}$$

$$(x; y) = (31k + 5 ; -25k - 4) \text{ بحيث } k \in \mathbb{Z} .$$

$$\bullet P(F) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} .$$

$$\bullet P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{C_2^2}{15} = \frac{1}{15} .$$

2/ أ/ الإحتمال الشرطي:

ب/ الحدثان E و F غير مستقلين، لأن: $P_F(E) \neq P(E)$

$$(P(E) \times P(F) = \frac{2}{45} \neq P(E \cap F)) \text{ (أو نقول لأن: } P(E \cap F) \neq \frac{2}{45})$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ بحيث يكون العدد M_n مضاعفا لـ 7 :

$$\bullet \text{لدينا: } M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2 + 2 = 4 \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{(n+3)!}{(n+1)!} + 2$$

$$= 2(n+1)n - (n+3)(n+2) + 2$$

$$= 2n^2 + 2n - n^2 - 3n - 2n - 6 + 2 = n^2 - 3n - 4 = M_n$$

$$M_n \text{ مضاعف للعدد 7 معناه } M_n \equiv 0 [7] \text{ ومنه: } n^2 - 3n - 4 \equiv 0 [7]$$

$$\text{وبالتالي: } n^2 + 4n + 3 \equiv 0 [7] \text{ أي: } (n+2)^2 - 1 \equiv 0 [7]$$

ومنه: $(n+1)(n+3) \equiv 0 [7]$ وبما أن 7 عدد أولي، فإن:

$$n+1 \equiv 0 [7] \text{ أو } n+3 \equiv 0 [7] \text{ ومنه: } n \equiv -1 [7] \text{ أو } n \equiv -3 [7]$$

$$\text{أي: } n \equiv 6 [7] \text{ أو } n \equiv 4 [7] \text{ إذن: } n \in \{7k+4; 7k+6 / k \in \mathbb{N}\} .$$

2/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية:

$$\text{لدينا: } 5^0 \equiv 1 [7] \text{ و } 5^1 \equiv 5 [7] \text{ و } 5^2 \equiv 4 [7] \text{ و } 5^3 \equiv 6 [7] \text{ و } 5^4 \equiv 2 [7]$$

$$\text{و } 5^5 \equiv 3 [7] \text{ و } 5^6 \equiv 1 [7] \text{ وعليه:}$$

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

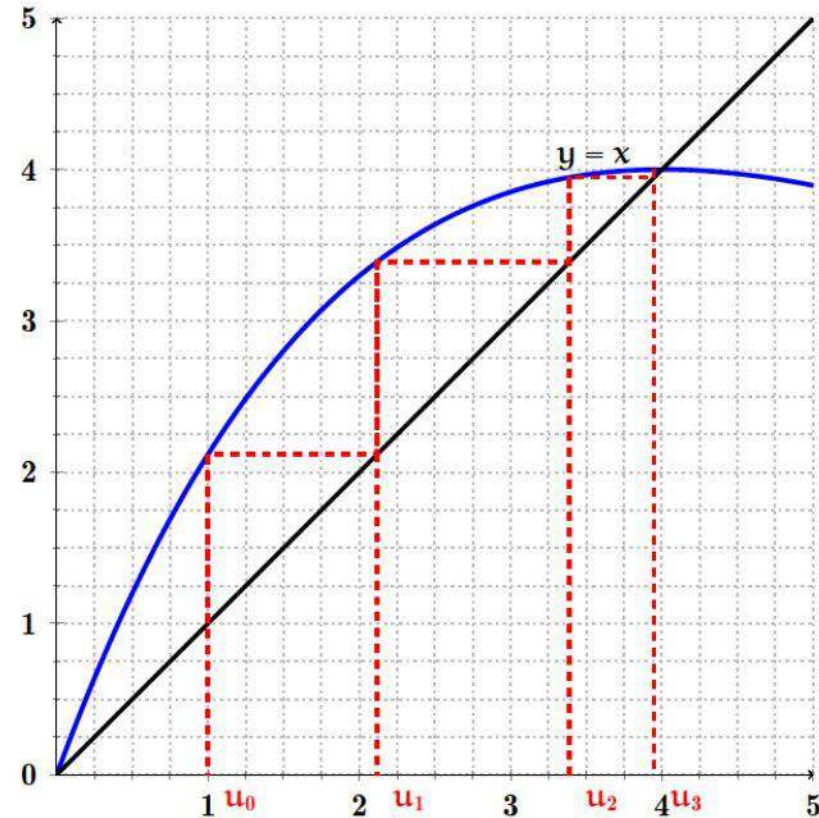
3/ أ/ الإثبات أن $4T_n = 5^{n+1} - 1$:

$$\bullet T_n = 5^0 + 5^1 + \dots + 5^n = 5^0 \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \right) = \frac{1}{4} (5^{n+1} - 1)$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1/ من خلال التمثيل البياني: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; 4]$ ومنه من أجل كل x من هذا المجال فإن: $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ أي $0 \leq f(x) \leq 4$ إذن: $f(x) \in [0; 4]$.

ب/ تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) :



ج/ التخمين:

من خلال التمثيل نؤمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 4.

2/ البرهان بالتراجع: نسمي الخاصية $0 < u_n \leq 4$: $P(n)$. ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- لدينا من أجل $n = 0$: $u_0 = 1$ أي: $0 < u_0 \leq 4$ أي: $P(0)$ صحيحة.
- لنفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0 < u_n \leq 4$ ومنه: $0 < f(u_n) \leq 4$ أي: $0 < u_{n+1} \leq 4$.
إذن إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة.
• إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ تبيان أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$
وبما أن: $0 < u_n \leq 4$ ومنه: $1 > 1 - \frac{1}{4}u_n \geq 0$ فإن: $e > e^{1-\frac{1}{4}u_n} \geq 1$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

استنتاج اتجاه التغير:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ وبما أن u_n ذات حدود موجبة، فإن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3/ استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، إذن هي متقاربة.
حساب النهاية:

المتتالية (u_n) متقاربة معناه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ حيث a عدد حقيقي.
ومنه: $a = a e^{1-\frac{1}{4}a}$ وبالتالي: $1 = e^{1-\frac{1}{4}a}$ ومنه: $1 - \frac{1}{4}a = 0$ إذن: $a = 4$ إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

4/ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

ا/ إثبات عبارة الحد العام:

الطريقة 1: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

- (D) و (Γ) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما: 0 و α .
 - (Γ) يقع فوق (D) على كل من المجالين:]-∞; α[و]0; +∞[.
 - (Γ) يقع تحت (D) على المجال:]α; 0[.

/2 إستنتاج إشارة g(x) : $g(x) = -x - 2 + 2(x+1)e^x$
 من خلال الوضعية النسبية لـ (D) و (Γ) نجد:

x	-∞	α	0	+∞
g(x)	+	0	-	+

/1/II / حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^x - 1)^2 = -\infty$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1)^2 = 1$)

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^x - 1)^2 = +\infty$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1)^2 = +\infty$)

ب/ المستقيم المقارب المائل:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^{2x} - 2e^x + 1) - x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x} - 2e^x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{2}2xe^{2x} - 2e^x) = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند -∞ .

ج/ دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) :
 لذلك ندرس إشارة:

$$f(x) - x = x(e^x - 1)^2 - x = x((e^x - 1)^2 - 1)$$

$$= x(e^x - 1 - 1)(e^x - 1 + 1) = xe^x(e^x - 2) = f(x) - x$$

وعليه:

x	-∞	0	ln 2	+∞
x	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	0	+
f(x) - x	+	0	-	+

ومنه: $1 - \frac{1}{4}u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ إذن: $u_n = 4 - 4 \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
 وبالتالي:
 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
 $= 4 - 4 \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + 4 - 4 \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \dots + 4 - 4 \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$
 $= (4 + 4 + \dots + 4) - 4 \left(\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \right)$
 $= 4n - 4 \ln\left(\frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}}\right)$
 $= 4n - 4 \ln(u_n)$

وعليه: $4n - S_n = 4 \ln(u_n)$ إذن: $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$

الطريقة 2: (البرهان بالتراجع)

نسمي الخاصية: $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$: P(n)

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

- من أجل n = 1 : لدينا من جهة: $u_1 = u_0 e^{1 - \frac{1}{4}u_0} = e^{\frac{3}{4}}$

ومن جهة أخرى: $e^{1 - \frac{1}{4}S_1} = e^{1 - \frac{1}{4}u_0} = e^{\frac{3}{4}}$ إذن: P(1) صحيحة.

- نفرض صحة P(n) من أجل n من $\mathbb{N}^*$ كيفي، أي: $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$

لدينا: $u_{n+1} = u_n e^{1 - \frac{1}{4}u_n} = e^{n - \frac{1}{4}S_n} e^{1 - \frac{1}{4}u_n} = e^{n+1 - \frac{1}{4}(S_n + u_n)}$

إذن: $u_{n+1} = e^{(n+1) - \frac{1}{4}S_{n+1}}$ وبالتالي: P(n+1) صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$

ب/ حساب النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n - 4 \ln(u_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - 4 \frac{\ln(u_n)}{n} \right) = 4$$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln 4$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

/I $y = (2x + 2)e^x$ (Γ) و $y = x + 2$ (D) .

/1 الوضعية النسبية: بقراءة بيانية نجد:

من إشارة $g(x)$ ، وعليه $f''(x)$ تنعدم عند كل من 0 و α وتغير إشارتها في جوارهما، إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلتيهما 0 و α

4/ معادلة المماس (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

وبما أن: $f(0) = 0$ و $f'(0) = (1 - 1)^2 + 0 = 0$ فإن: $(T) : y = 0$

إثبات وحدانية المماس الذي يمر من المبدأ:

لذلك نحل المعادلة: $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$

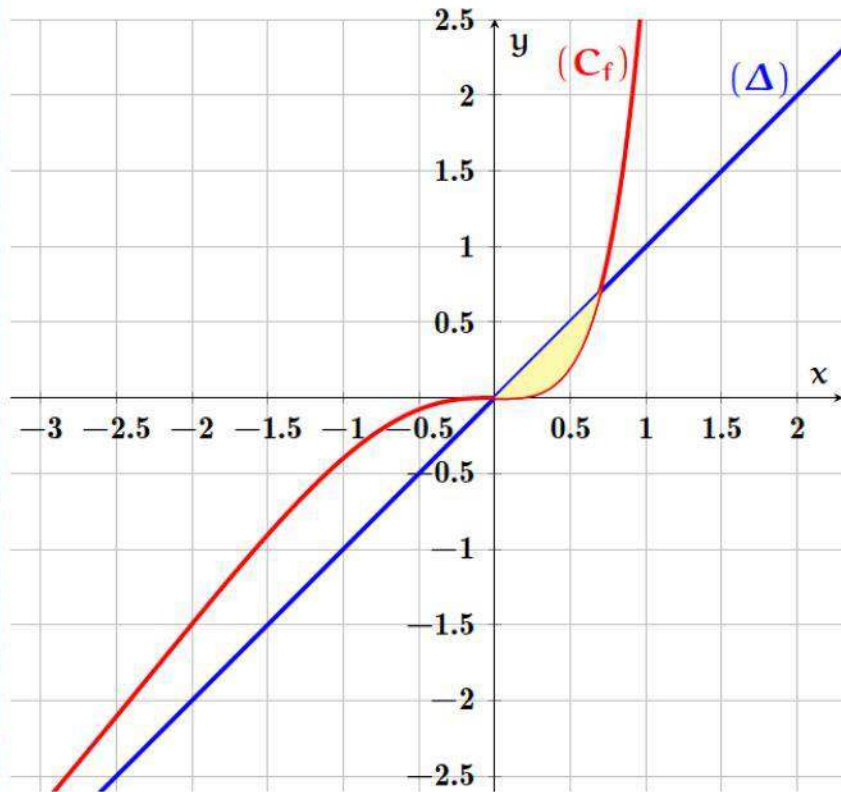
أي المعادلة: $-a[(e^a - 1)^2 + 2a(e^a - 1)] + a(e^a - 1)^2 = 0$

تكافئ: $a(e^a - 1)(-e^a + 1 - 2a + e^a - 1) = 0$

تكافئ: $-2a^2(e^a - 1) = 0$ معناه: $a = 0$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا يشمل المبدأ هو نفسه المماس (T).

5/ / الإنشاء:



إذن: - (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]-\infty; 0[$ و $]\ln 2; +\infty[$.

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال: $]0; \ln 2[$.

- (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $O(0; 0)$ و $A(\ln 2; \ln 2)$.

2/ تبين أن: $x(e^x - 1) \geq 0$ لدينا:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$x(e^x - 1)$	+	0	+

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x - 1) \geq 0$.

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1)$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^x(e^x - 1)x \geq 0$ وكذلك

$(e^x - 1)^2 \geq 0$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) \geq 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3/ إثبات عبارة المشتق الثاني: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x) = 2e^x(e^x - 1) + (2e^x + 2xe^x)(e^x - 1) + 2xe^xe^x$$

$$= 2e^x(e^x - 1 + (1 + x)(e^x - 1) + xe^x)$$

$$= 2e^x(e^x - 1 + e^x - 1 + xe^x - x + xe^x)$$

$$= 2e^x(-x - 2 + e^x(2x + 2)) = 2e^x g(x) = f''(x)$$

استنتاج نقاط الإنعطاف: لدينا: $f''(x) = 2e^x g(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

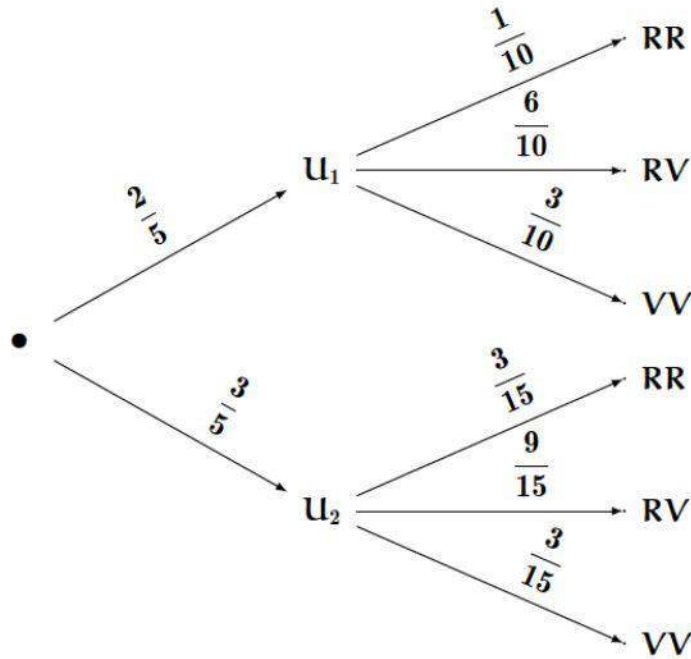
1/ إتمام شجرة الاحتمالات: لدينا:

$$\bullet P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{3}{5}$$

$$\bullet P_{U_1}(RV) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} \quad (= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}) \quad \bullet P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

$$\bullet P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} \quad (= 1 - \frac{3}{15} - \frac{9}{15}) \quad \bullet P_{U_2}(RR) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

وعليه:



2/ حساب احتمالي الحدثين:

- الحدث A : الأولى حمراء والأخرتين حمراوين، أو الأولى خضراء والأخرتين خضراوين:

ب/ تعيين قيم العدد الحقيقي m : بقراءة بيانية:

تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة لما $m \in]0; 1[$.

$$6/ \text{المكاملة بالتجزئة: لتبين أن: } \int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx = \frac{5 - 8 \ln 2}{4}$$

$$\text{نعتبر: } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x (e^x - 2) \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} (e^x - 2)^2 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx &= \left[\frac{1}{2} x (e^x - 2)^2 \right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^x - 2)^2 dx \\ &= \left(\frac{\ln 2}{2} (e^{\ln 2} - 2)^2 - 0 \right) - \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 4e^x + 4) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 4e^x + 4x \right]_0^{\ln 2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - 4e^{\ln 2} + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} + 4 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} - 4 \times 2 + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} + 4 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-2 + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (4 - 8 \ln 2 + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx = \frac{1}{4} (5 - 8 \ln 2)}$$

ب/ استنتاج المساحة: بما أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على

المجال $[0; \ln 2]$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) على هذا المجال هي:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 2} (x - f(x)) dx = - \int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx \\ &= -\frac{1}{4} (5 - 8 \ln 2) \quad \text{u.a} = \frac{1}{4} (-5 + 8 \ln 2) \times 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = -5 + 8 \ln 2 \text{ cm}^2}$$

حساب الامل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i) = 1 \times \frac{3}{25} + 2 \times \frac{21}{25} + 3 \times \frac{1}{25} = \frac{48}{25}$$

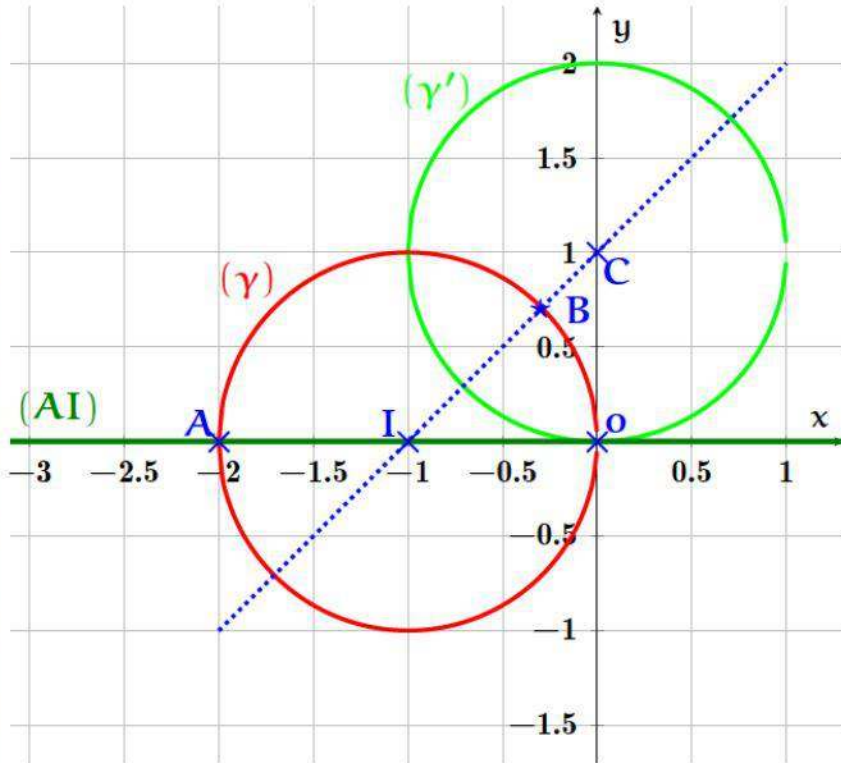
$$E(X) = 1.92$$

ج/ حساب الاحتمال:

$$P(C_3^X = 3) = P([X = 1] \cup [X = 2]) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{24}{25}$$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1/ إنشاء:



2/ استنتاج الطويلة وعمدة للعدد $Z_B + 1$:

$$\bullet |Z_B + 1| = |Z_B - Z_I| = IB = 1$$

$$\bullet \arg(Z_B + 1) = \arg(Z_B - Z_I) = (\vec{u}; \vec{IB}) = (\vec{IO}; \vec{IB})$$

$$P(A) = P(U_1)P_{U_1}(RR) + P(U_2)P_{U_2}(VV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{15}$$

$$P(A) = \frac{4}{25}$$

- الحدث B : الأولى حمراء، أو الأولى خضراء والأخرتين واحدة حمراء والأخرى خضراء أو الأولى خضراء والأخرتين حمراوين.
(أو يمكن القول أنه الحدث العكسي لثلاث كريات خضراء-الأولى خضراء والأخرتين حمراوين)

$$P(B) = P(U_1) + P(U_2) (P_{U_2}(RV) + P_{U_2}(RR)) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{9}{15} + \frac{3}{15} \right)$$

$$P(B) = \frac{22}{25} \quad \left(P(B) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{15} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} \right)$$

3/ حساب الاحتمال الشرطي:

$$\bullet P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{15}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{3}{4} = P_A(U_2)$$

4/ ا/ قيم المتغير العشوائي X نلخصها كما يلي:

في حالة سحب الأولى حمراء (حالة سحب كرتين من U_1): نميز ثلاث حالات: إما: $U_1 - RR \rightarrow X = 3$ وإما: $U_1 - RV \rightarrow X = 2$ وإما: $U_1 - VV \rightarrow X = 1$

في حالة سحب الأولى خضراء (حالة سحب كرتين من U_2):
بقي في الصندوق U_1 كرتان خضراوان، أي: $X = 2$.
إذن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 و 2 و 3.

ب/ قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$$\bullet P(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{25}$$

$$\bullet P(X = 2) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{25}$$

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$\bullet P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25} \quad \text{وعليه:}$$

2 / إثبات العلاقة:

$$\bullet Z' - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - \frac{i(Z+1)}{Z+1} = \frac{i(Z+2-Z-1)}{Z+1} = \frac{i}{Z+1} = Z' - i$$

ب/ لدينا: $Z = -1 + e^{i\theta}$ أي: $Z - Z_I = +e^{i\theta}$ وبالتالي:

$$\begin{cases} IM = 1 \\ (\vec{IO}; \vec{IM}) = \theta \end{cases} \text{ معناه: } \begin{cases} |Z - Z_I| = 1 \\ \arg(Z - Z_I) = \theta \end{cases}$$

لما θ تلمس المجال $[-\pi; \pi]$ فإن: M تلمس الدائرة (γ) ، وعندئذ بالتعويض في العلاقة في السؤال السابق نجد:

$$Z' - i = \frac{i}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

$$\text{أي: } Z' - Z_C = e^{i\theta'} \quad \text{حيث: } \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{وذلك معناه: } \begin{cases} CM' = 1 \\ (\vec{u}; \vec{CM'}) = \theta' \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} |Z' - Z_C| = 1 \\ \arg(Z' - Z_C) = \theta' \end{cases}$$

وبالتالي لما M تلمس الدائرة (γ) أي لما θ تلمس المجال $[-\pi; \pi]$ فإن θ' تلمس المجال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ وعندئذ النقطة M' تلمس دائرة (γ') مركزها النقطة C ونصف قطرها 1 .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1 / تعيين باقي القسمة الإقليدية: لدينا: $2009 = 16(125) + 9$ ومنه:

$2009 \equiv 9 \pmod{16}$ ومنه: $2009^2 \equiv 81 \pmod{16}$ أي: $2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$ إذن باقي قسمة العدد 2009^2 على 16 هو 1 .

ب/ الإستنتاج:

لدينا: $2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$ ومنه: $(2009^2)^{4000} \equiv 1 \pmod{16}$ أي:

$$2009^{8000} \equiv 1 \pmod{16} \quad \text{وبما أن: } 2009 \equiv 9 \pmod{16}$$

لدينا الزاوية الموجهة $(\vec{IO}; \vec{IB})$ هي زاوية مركزية في الدائرة (γ) ، زاويتها المحيطية هي: $(\vec{AO}; \vec{AB})$ إذن:

$$(\vec{IO}; \vec{IB}) = 2(\vec{AO}; \vec{AB}) = 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

إذن: $\frac{\pi}{4}$ هي عمدة للعدد المركب $Z_B + 1$.

الشكل الجبري لـ Z_B : لدينا: $Z_B + 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه:

$$Z_B = -1 + \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = Z_B$$

3 / إثبات أن العدد حقيقي:

$$\bullet \frac{Z_B + 1}{i + 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + i} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}{1 + i} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن العدد $\frac{Z_B - Z_I}{Z_C - Z_I}$ حقيقي.

الإستنتاج: لدينا العدد $\frac{Z_B - Z_I}{Z_C - Z_I}$ حقيقي موجب معناه:

$$\arg \left(\frac{Z_B - Z_I}{Z_C - Z_I} \right) = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

إذن النقط: I و B و C على استقامة واحدة.

1/II / الإثبات:

$$\begin{aligned} \arg(Z') &= \arg \left(\frac{i(Z+2)}{Z+1} \right) = \arg(i) + \arg \left(\frac{Z+2}{Z+1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \arg \left(\frac{Z - Z_A}{Z - Z_I} \right) = \left[\frac{\pi}{2} + (\vec{MI}; \vec{MA}) \right] = \arg(Z') \end{aligned}$$

ب/ تعيين مجموعة النقط M بحيث Z' تخلي صرف:

$$\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{معناه: } Z' \text{ تخلي صرف معناه:}$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد: $\frac{\pi}{2} + (\vec{MI}; \vec{MA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{أي: } (\vec{MI}; \vec{MA}) = k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

إذن مجموعة النقط M في هذه الحالة هي المستقيم (AI) وهو منطبق على حامل محور الفواصل.

فإن: $2009 \equiv 4 [5]$ أي: $2009 \equiv -1 [5]$ ومنه: $2009^2 \equiv 1 [5]$ وبالتالي: $2009^2 - 1 \equiv 0 [5]$ إذن: u_0 يقبل القسمة على 5 .

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

/ تبيان أن u_0 يقبل القسمة على 5 :

لدينا: $2009 \equiv 4 [5]$ أي: $2009 \equiv -1 [5]$ ومنه: $2009^2 \equiv 1 [5]$ وبالتالي: $2009^2 - 1 \equiv 0 [5]$ إذن: u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ إثبات العلاقة التراجعية:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 1)^5 - 1 = -1 + \sum_{p=0}^5 C_5^p (u_n)^{5-p} (1)^p \\ &= -1 + C_5^0 u_n^5 + C_5^1 u_n^4 + C_5^2 u_n^3 + C_5^3 u_n^2 + C_5^4 u_n + C_5^5 u_n^0 \\ &= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1 \\ &= u_n (u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5) \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$$

ج/ البرهان بالتراجع: نسمي الخاصية: " u_n مضاعف لـ 5^{n+1} ": $P(n)$. ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- من أجل $n = 0$:

لدينا u_0 يقبل القسمة على 5 أي u_0 مضاعف لـ 5 إذن $P(0)$ صحيحة.

- ليكن n عددا طبيعيا. لنفرض صحة $P(n)$ أي: u_n مضاعف لـ 5^{n+1}

ومنه: u_n^4 مضاعف لـ مضاعف لـ 5^{n+1} أي أنه مضاعف لـ 5 ،

وكذلك $5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5

إذن $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5

أي: $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) = 5k$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

ولدينا u_n مضاعف لـ 5^{n+1} معناه: $u_n = 5^{n+1}q$ بحيث $q \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)] = 5^{n+1}q5k = 5^{n+2}qk$

معناه: u_{n+1} مضاعف لـ 5^{n+2} ، إذن $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

3/ ا/ التحقق: لدينا:

$$u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$$

$$u_2 = (u_1 + 1)^5 - 1 = 2009^{50} - 1$$

$$u_3 = (u_2 + 1)^5 - 1 = 2009^{250} - 1$$

ومنه:

إذن:

ب/ الإستنتاج:

مما سبق نستنتج أن u_3 مضاعف لـ 5^4 أي أن u_3 مضاعف لـ 625

$$\text{ومنه: } 2009^{250} - 1 \equiv 0 [625] \text{ إذن: } 2009^{250} \equiv 1 [625]$$

$$\text{ومنه: } (2009^{250})^{32} \equiv 1 [625] \text{ أي: } 2009^{8000} \equiv 1 [625] \text{ إذن:}$$

$$2009^{8001} \equiv 2009 [625]$$

4/ ا/ البرهان:

لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة، بحيث: a مضاعف لكل من b و c ، و b و c أوليان فيما بينهما.

الطريقة 1:

a مضاعف لـ b معناه: $a = b.k$; $k \in \mathbb{Z}$ (*)

وبما أن a مضاعف لـ c فإن c يقسم a أي c يقسم $b.k$

وبما أن b و c أوليان فيما بينهما فإن: c يقسم k ، أي $k = c.q$; $q \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في (*) نجد: $a = b.c.q$ إذن a مضاعف للجداء bc .

الطريقة 2:

a مضاعف لـ b معناه: b يقسم a ،

و a مضاعف لـ c معناه: c يقسم a ،

ومنه الجداء bc يقسم a لأن b و c أوليان فيما بينهما،

أي: a مضاعف للجداء bc .

ب/ تبيان قابلية قسمة العدد $2009^{8001} - 2009$ على 10000 :

$$\text{لدينا: } 2009^{8001} \equiv 2009 [16] \text{ أي: } 2009^{8001} - 2009 \equiv 0 [16]$$

إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 16 .

2/ الإستنتاج: بقراءة جدول التغيرات للدالة g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x : g(x) > 0$

II/ من أجل $x > 0$: $f(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x + 1$ و $f(0) = 1$.

1/ / تبيان النهاية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x + 1 \right] = +\infty$$

ب/ تبيان أن $y = x + 2$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - 1 \right] = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2/ / دراسة قابلية الاشتقاق عن 0 :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1 = +\infty$$

إذن الدالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مواز لحامل محور الترتيب معادلته: $x = 0$.

ب/ تبيان عبارة المشتقة:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$f'(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \cdot \left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}} \right)' + 1$$

$$= \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \left(\frac{x - x - 1}{x^2} \right) \left(\frac{x}{x+1} \right) + 1$$

ولدينا: $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$ أي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{625}$
إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 625.

ولدينا: $16 = 2^4$ وكذلك: $625 = 5^4$ إذن: $\text{PGCD}(16; 625) = 1$ ؛
نستنتج أن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف للجداء: $10000 = 16 \times 625$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ 1/ دراسة تغيرات الدالة g :

$$\bullet \text{ النهايات: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right) = 0$$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ و $\ln 1 = 0$ ، وكذلك: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ، وكذلك: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$)

وذلك: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$

• اتجاه التغير: لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$g'(x) = \left(\frac{x+1}{x} \right)' + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x - 1 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} = g'(x)$$

نلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما،

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

• جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$+\infty$	0

4/ /ا/ تبيان أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}xf'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x(g(x) + 1) - \frac{1}{x+1} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} + x - \frac{1}{x+1} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x+1}{x+1} + x + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1\right) = \frac{1}{2}(2f(x)) \end{aligned}$$

$$F'(x) = f(x)$$

إذن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ استنتاج مساحة الحيز:

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ هي:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^1 = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8} \left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \text{ u.a} = \frac{1}{8} \left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \times 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} \left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \text{ cm}^2$$

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}^* \quad /5$$

/ا/ إثبات عبارة الحد العام:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$e^{f(n)-n-1} = e^{n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = u_n$$

ب/ إثبات أن المتتالية u_n متزايدة تماما:

نعتبر الدالة المرفقة بعبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1$$

$$f'(x) = g(x) + 1$$

إتجاه التغير:

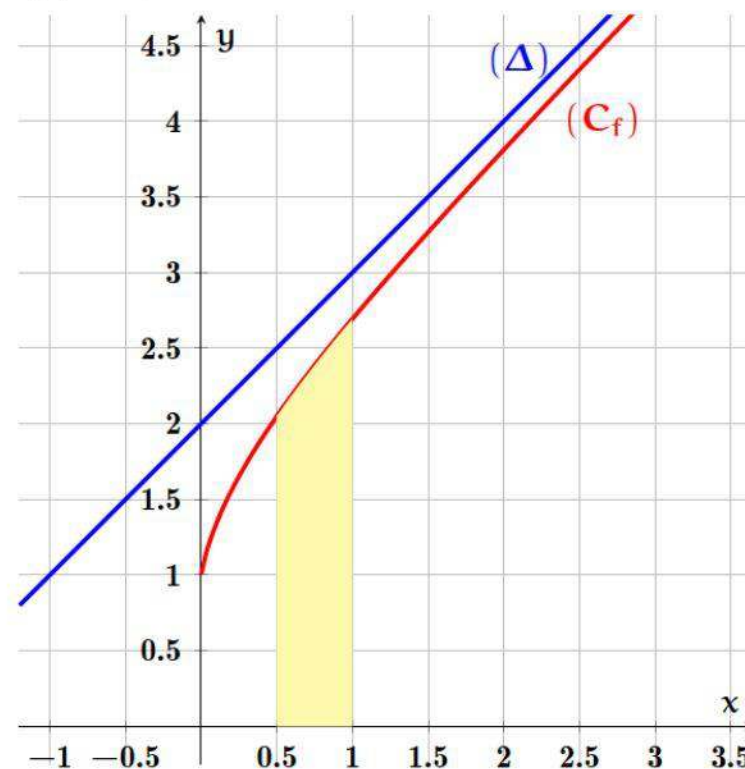
لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$ ومنه: $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	1	$+\infty$

$$f(1) = 2 + \ln 2 \approx 2.7$$

3/ الإنشاء:



الدالة h معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = e^{f(x)-x-1}$
لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$h'(x) = (f'(x) - 1)e^{f(x)-x-1} = g(x)e^{f(x)-x-1}$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$
فإن: $h'(x) > 0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ؛
إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ج/ تبيان النهاية:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{f(n)-n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} = e.$$

$$. \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1 \right. \text{ لأن: } \left. \right)$$

الإستنتاج:

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد e .