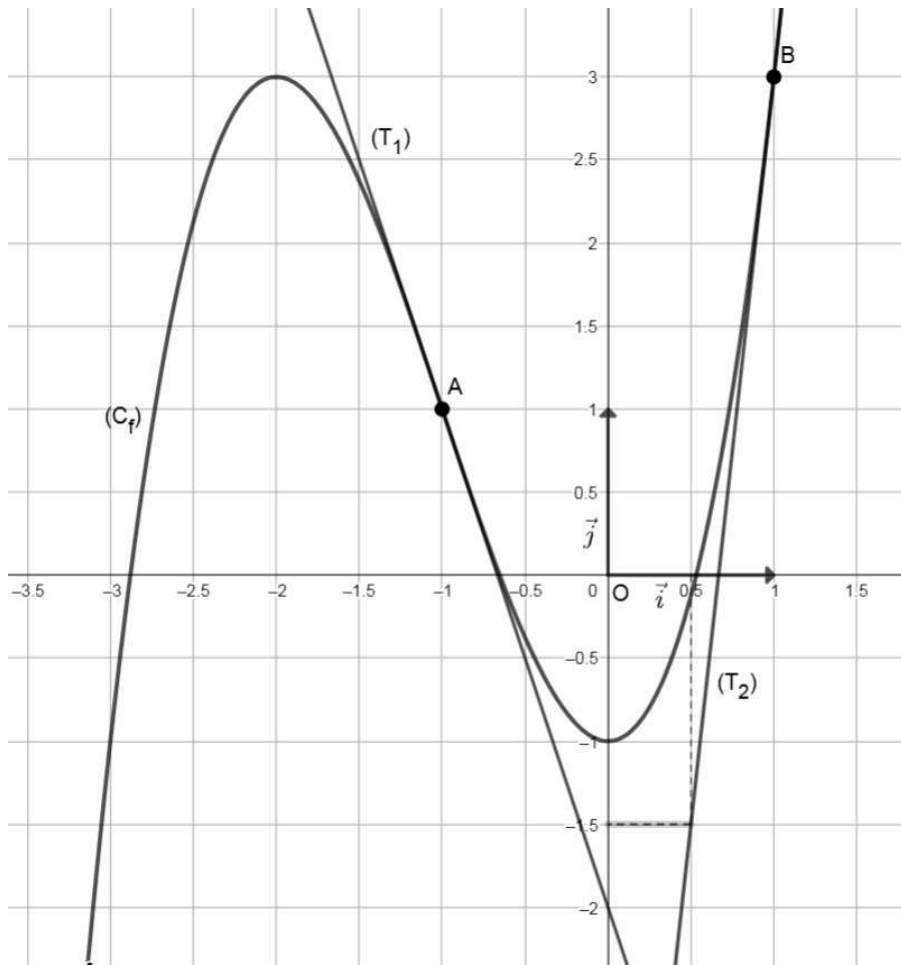


الواجب المنزلي رقم - 1 - في الرياضيات

التمرين الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = ax^3 + bx + c$ حيث: a ، b و c أعداد حقيقية.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (T_1) و (T_2) مماسي للمنحنى (C_f) في النقطة A و B على الترتيب.



(I) بقراءة بيانية

① عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② عين: $f(0)$ ، $f(-2)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-2)$ ، $f'(-1)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) + 3}{h}$

③ عين معادلة المماس (T_1)

④ هل (C_f) يقبل نقطة انعطاف ؟ برر.

٥ شكل جدول تغيرات الدالة f

٦ شكل جدول اشارة $f'(x)$ حسب قيم x

٧ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$ ثم تحقق أن $\alpha \in]0; 1[$

٨ بين أن $a = 1$ ، $b = 3$ و $c = -1$

٩ تحقق من نتيجة السؤال ٤ حسابيا.

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$

١ بين أن g دالة زوجية

٢ اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

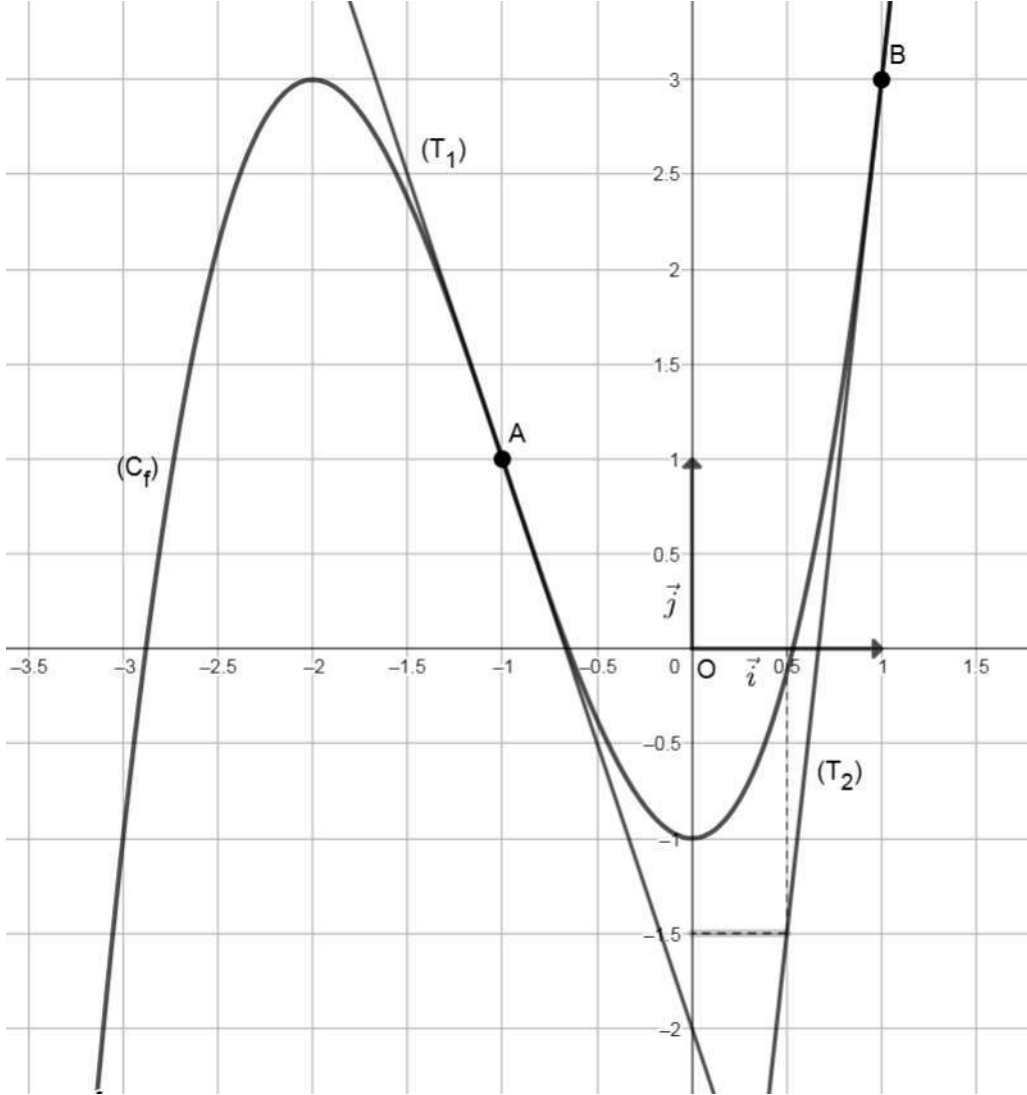
(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = [f(x)]^3$

١ أكتب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ (عبارة $h(x)$ لا يطلب تعيينها) ثم شكل جدول تغيرات الدالة h

التصحيح النموذجي للواجب المنزلي رقم 1 - في مادة الرياضيات

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث: a, b و c أعداد حقيقية.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (T_1) و (T_2) مماسي للمنحنى (C_f) في النقطة A و B على الترتيب.



◀ بقراءة بيانية :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ تعيين

من الشكل نلاحظ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) + 3}{h}$ ، $f'(-1)$ ، $f'(-2)$ ، $f'(0)$ ، $f(-2)$ ، $f(0)$ تعيين $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) + 3}{h}$

◀ تعيين $f(0)$ و $f(-2)$

من الشكل نلاحظ: $f(0) = -1$ و $f(-2) = 3$

◀ تعيين $f'(0)$

$f(0)$ قيمة حدية صغرى اذن: $f'(0) = 0$

◀ تعيين $f'(-2)$

$f(-2)$ قيمة حدية كبرى اذن: $f'(-2) = 0$

◀ تعيين $f'(-1)$

$f'(-1)$ هو معامل توجيه المماس (T_1) اذن:

$$f'(-1) = \frac{1 - (-2)}{-1 - 0} = \frac{3}{-1} = -3$$

◀ تعيين $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) + 3}{h}$

لدينا من جهة : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) - (-3)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) - f'(-1)}{h} = f''(-1)$$

ومن جهة أخرى: المماس (T_1) اخترق المنحنى (C_f) في النقطة $A(-1;1)$ اذن النقطة $A(-1;1)$ هي نقطة

انعطاف ومنه نستنتج أن: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1 + h) + 3}{h} = 0$

◀ تعيين $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

ومن جهة أخرى: $f'(1)$ هو معامل توجيه المماس (T_2) اذن:

$$f'(1) = \frac{3 - (-\frac{3}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}} = 9$$

ومنه نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 9$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$ معادلة المماس (T_1)

لدينا: $f(-1) = 1$ و $f'(-1) = -3$

$$(T) : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$(T) : y = -3(x + 1) + 1$$

$$(T) : y = -3x - 2$$

4. هل (C_f) يقبل نقطة انعطاف ؟ مع التبرير .

لدينا: المماس (T_1) اخترق المنحنى (C_f) في النقطة $A(-1;1)$ اذن النقطة $A(-1;1)$ هي نقطة انعطاف

5. تشكيل جدول تغيّرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

6. تشكيل جدول اشارة الدالة f'

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

7. تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$ ثم تحقق أن $\alpha \in]0; 1[$.

◀ تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$

لدينا: f دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، $f(0) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

اذن: $f(0) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$ ومنه: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.

◀ تحقق أن $\alpha \in]0; 1[$

لدينا: $f(0) = -1$ و $f(1) = 3$ اذن: $f(0) \times f(1) < 0$ ومنه: $\alpha \in]0; 1[$

8. تبيان أن $a = 1$ ، $b = 3$ و $c = -1$.

لدينا: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ومنه: $f(0) = c$ ، بما أن: $f(0) = -1$ اذن: $c = -1$

لدينا: $f(1) = 3$ اذن: $a + b = 4$ ولدينا من جهة أخرى $f(-2) = 3$ اذن: $-8a + 4b = 4$ أي: $-2a + b = 1$

نحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} a + b = 4 & (1) \\ -2a + b = 1 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) في -1 ، فتحصل: $2a - b = -1$ اذن:

$$\begin{cases} a + b = 4 & (1) \\ 2a - b = -1 & (3) \end{cases}$$

ومنه: بجمع (1) و (3) نجد: $3a = 3$ اذن: $a = 1$ ، بتعويض في (1) نحصل: $1 + b = 4$ اذن: $b = 3$
اذن: $a = 1$ ، $b = 3$ و $c = -1$ ومنه: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

9.  تحقق من نتيجة السؤال 4 حسابيا .

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 3x^2 + 6x$

f' دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f''(x) = 6x + 6$

لدينا: $6x + 6 = 0$ ومنه $6x = -6$ اذن: $x = -1$ ، نلخص جدول اشارة $f''(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن المشتقة الثانية انعدمت عند -1 وغيرت من اشارتها اذن: النقطة $(-1; f(-1))$ هي نقطة انعطاف أي: أن النقطة $A(-1; 1)$ هي نقطة انعطاف

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$

1.  تبيان أن g دالة زوجية

◀ $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 .

◀ لدينا: من اجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

(لأن: من اجل كل $x \in \mathbb{R}$: $|-x| = |x|$)، ومنه g دالة زوجية.

2. شرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم رسمه في نفس المعلم السابق.

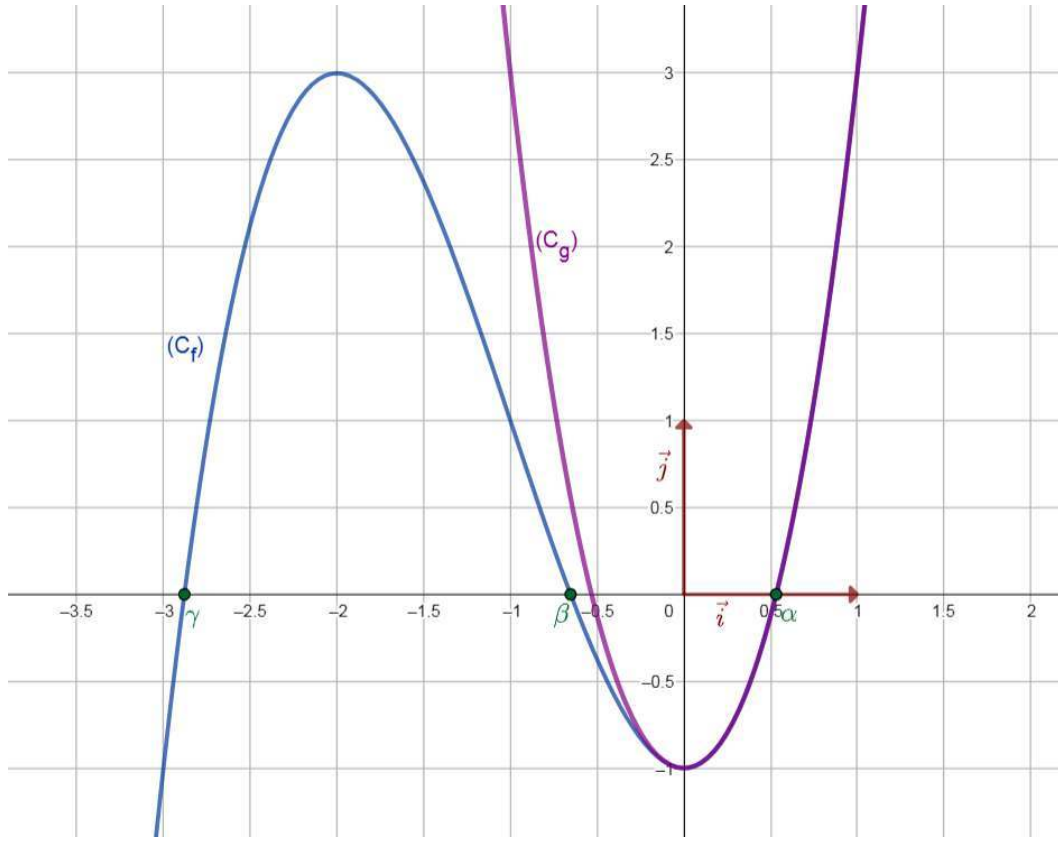
◀ شرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f)

لاحظ:

$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

(C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; +\infty[$ ، و (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور لتراتيب في المجال $] -\infty; 0]$

◀ رسم (C_g)



(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = [f(x)]^3$

1. كتابة $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ (عبارة $h(x)$ لا يطلب تعيينها) ثم شكل جدول تغيرات الدالة h

◀ كتابة $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

h دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$h'(x) = 3f'(x)[f(x)]^2$$

◀ تشكيل جدول تغيرات الدالة h

اشارة h' من اشارة f' ، نلخص ذلك في الجدول التالي:

x	$-\infty$	γ	-2	β	0	α	$+\infty$					
$h'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$												

◀ ملاحظة: تقبل كل الأجوبة الصحيحة.

إنتى - تحياتي للجميع