

(I) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x + 1}$.

($\mathcal{C}_f$) المنحنى البياني للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ ، استنتج أن f دالة فردية .

ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول التغيرات للدالة f .

ثم استنتج أنه من أجل $x \in [0; +\infty[$ فإن : $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{x}{2}$

(3) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - 1 + \frac{x}{2} \right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا . ثم استنتج معادلة المستقيم المقارب (Δ') عند $(-\infty)$.

(4) أنشئ ($\mathcal{C}_f$) و المستقيمات المقاربة .

(5) العدد الحقيقي λ موجب تماما . أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى ($\mathcal{C}_f$)

و المستقيمات : $x = 0$, $x = \lambda$, $y = 1 - \frac{x}{2}$. لاحظ : $\left(\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right)$

ثم أحسب النهاية التالية : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني :

(1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10.

ب- ما هو باقي قسمة العدد A_n على 10 بحيث : $A_n = 3^{16n+6} - 2 \times 109^{2n+3} - 13$ ؟

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n} (3n+1) [10]$.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد الطبيعي $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1}$ مضاعفا للعدد 10.

(3) أ) احسب بدلالة n المجموع $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد الطبيعي S_n قابلا للقسمة على 10

بالتوفيق والسداد

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$.

1/ أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد غير معدوم n : $S_n = \frac{1}{3} n (2n+1) (2n-1)$

ب- أحسب المجموع : $S = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 31^2$.

2/ نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_n = n(2n-1)(2n+1)$.

أ- عين قيم n التي من أجلها يكون العدد A_n مضاعفا للعدد 6.

ب- أثبت أن $A_n \equiv 0[5]$ تكافئ $n(n^2-4) \equiv 0[5]$

ج- عين قيم n التي تحقق: $A_n \equiv 0[5]$. ثم استنتج قيم n التي تحقق: $A_n \equiv 0[30]$.

التمرين الثاني

الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب / احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ج/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتهما: $y = x - e$

و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج/ بين أن المستقيم (Δ) الذي معادله له : $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

(4) المستقيم (D_m) الذي معادله له : $y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$ بحيث m عدد حقيقي.

أ/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2} + e ; \frac{\ln 2}{2} \right)$.

ب/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

(5) نضع: $I = \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} [f(x) - (x-e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dx$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1 .

ب/ بين أن: $0 \leq I_n \leq \ln 2$ ج/ عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال : $\ln(1+x) \leq x$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

أ/ استنتج أن : $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$ ب/ أعط حصرًا للعدد $I + I_1$