

## اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

## التمرين الأول: (06 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء وأربع كريات خضراء وخمس كريات حمراء (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي أن واحد.

I. احسب احتمال الحوادث الآتية:

أ)  $A$ : الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون.

ب)  $B$ : الحصول على ثلاث كريات مختلفة مثنى مثنى.

ج)  $C$ : الحصول على كرية بيضاء على الأقل.

II. نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان.

1) عين قيم المتغير العشوائي  $X$  ثم عرف قانون احتماله.

2) احسب أمله الرياضي  $E(X)$  وتباينه  $V(X)$  وانحرافه المعياري  $\sigma(X)$ .

## التمرين الثاني: (06 نقاط)

اجب بصحيح أو خطأ في كل حالة مع التعليل (الإجابة غير المبررة لا تؤخذ بعين الاعتبار):

1) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ . العدد  $3$  يقسم  $2^{2n} - 1$ .

2) إذا كان العدد الصحيح  $x$  حل للمعادلة  $x^2 + x \equiv 0 [6]$  فإن  $x \equiv 0 [3]$ .

3) الثنائيات الصحيحة  $(x; y)$  حلول المعادلة  $12x - 5y = 3$  هي  $(10k + 4; 24k + 9)$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .

4) توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الطبيعية  $(a; b)$  بحيث إذا كان  $a < b$

$$\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$$

5) العددان الطبيعيان  $M$  و  $N$  حيث  $M$  يكتب في النظام العشري  $abc$  و  $N$  يكتب في النظام العشري  $bca$ .

إذا كان  $M$  مضاعف للعدد 27 فإن  $M - N$  مضاعف لـ 27.

### التمرين الثالث: (08 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases} \quad \text{I. نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ حيث:}$$

(1) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $2 < u_n < 4$ .

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم بين أنها متقاربة.

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ .

(4) استنتج أن:  $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ . ثم حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

$$\text{II. } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ حيث: } v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}.$$

(1) اثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$ .

(2) اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  واستنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  بطريقة أخرى.

(4) احسب بدلالة  $n$  المجموعين  $S_n$  و  $T_n$  حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} \text{ و } T_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{1}{u_1 - 2} + \frac{1}{u_2 - 2} + \dots + \frac{1}{u_{n-1} - 2}$$

(5) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

أستاذ المارة  
عماد الطاهر

## إجابة اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

## التمرين الأول:

I. عدد الإمكانيات:  $C_{12}^3 = 220$ 

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{220} = \frac{3}{44} : \text{حساب } P(A) \text{ (أ)}$$

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{220} = \frac{3}{11} : \text{حساب } P(B) \text{ (ب)}$$

$$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_9^2 + C_3^2 \times C_9^1 + C_3^3}{220} = \frac{136}{220} = \frac{34}{55} : \text{حساب } P(C) \text{ (ج)}$$

II. (1) قيم المتغير العشوائي  $X$ 

$$X \in \{1; 2; 3\}$$

قانون الاحتمال :

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{3}{44}$$

$$P(X = 3) = P(B) = \frac{3}{11}$$

$$P(X = 2) = 1 - \frac{3}{11} - \frac{3}{44} = \frac{29}{44}$$

$$E(X) = \frac{97}{44} : \text{الأمّل الرياضياتي: (2)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,54 \text{ الانحراف المعياري } V(X) = \frac{584}{1936} = 0.30 \text{ التباين:}$$

## التمرين الثاني:

(1) **صحيح:** التعليل  $4 \equiv 1[3]$  ومنه  $(2^2)^n \equiv 1^n[3]$  وبالتالي  $2^{2^n} - 1 \equiv 0[3]$

(2) **خطأ التعليل:**  $x^2 + x = x(x+1)$

$$x^2 + x = x(x+1)$$

$x^2 + x \equiv 0[3]$  يكافئ  $x+1 \equiv 0[3]$  أو  $x \equiv 0[3]$  أي أن  $x \equiv 2[3]$  أو  $x \equiv 0[3]$ .

(3) **خطأ:**  $12x - 5y = 3$  لدينا  $(4; 9)$  حل خاص للمعادلة

5 يقسم  $12(x-4)$  و 5 و 12 أوليان فيما بينهما. حسب مبرهنة غوص 5 يقسم  $x-4$  ومنه  $x = 5k + 4$  و  $y = 12k + 9$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

(4) **صحيح:** التعليل نضع  $a = da'$  و  $b = db'$  حيث  $d = PGCD(a; b)$  و  $PGCD(a'; b') = 1$

ومنه  $PPCM(a; b) = da'b'$  بالتعويض في المعادلة نجد:  $d(a'b' - 1) = 1$  ومنه  $d$  يقسم 1 وبالتالي  $d = 1$

ومنه  $PPCM(a; b) = ab$  إذن  $ab - 1 = 1$  ومنه  $ab = 2$  الشناتيات المحققة  $(1; 2)$  و  $(2; 1)$  وبما أن  $a < b$  فإن الشناتية الوحيدة  $(1; 2)$

(5) **صحيح:** التعليل

$M = 100a + 10b + c = 27k$  و  $N = 100b + 10c + a$ . حيث  $k \in \mathbb{N}$

$M - N = 9(11a - 10b - c) = 9(11a + 100a - 27k) = 27(37a - k)$

ومنه  $M - N$  مضاعف لـ 27

## التمرين الثالث:

I.

(1) البرهان بالتراجع أن:  $2 < u_n < 4$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ . نسمي الخاصية  $P(n)$

نتحقق من صحة  $P(0)$ :  $u_0 = 3$  و  $2 < 3 < 4$  محققة.

نفرض صحة  $P(n)$  ونبرهن صحة  $P(n+1)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$$u_{n+1} = 8 - \frac{24}{u_n + 2} \text{ حيث } 2 < u_{n+1} < 4 \text{ ونبرهن } 2 < u_n < 4$$

$$2 < u_n < 4 \text{ بإضافة } 2 \text{ نجد } 4 < u_n + 2 < 6 \text{ ومنه } -6 < \frac{-24}{u_n + 2} < -4 \text{ ومنه } 2 < u_{n+1} < 4 \text{ من أجل كل عدد$$

طبيعي  $n$ . ومنه  $2 < u_n < 4$

$$(2) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ وبالتالي } (u_n) \text{ متزايدة.}$$

$(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

$$(3) \quad 4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \text{ لدينا } (u_n) \text{ متزايدة وحدها الأول } u_0 = 3 \text{ ومنه } 3 \leq u_n$$

$$\text{لدينا } 3 \leq u_n \text{ ومنه } \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \text{ وبالضرب في } 4(4 - u_n) \text{ نجد } 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n).$$

$$(4) \text{ لدينا: } 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n) \text{ ومنه}$$

$$4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0)$$

$$4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1)$$

.

.

.

$$4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ بالضرب طرف الى طرف نجد: } 4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$$

لدينا  $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n = 0$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

**.II**

(1) إثبات أن  $(v_n)$  متتالية هندسية.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{8 - \frac{24}{u_n + 2} - 4}{8 - \frac{24}{u_n + 2} - 2} = \frac{4u_n - 16}{6u_n - 12} = \frac{4}{6}v_n$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = -1$

$$(2) \text{ عبارة الحد العام: } v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{لدينا: } v_n = 1 - \frac{2}{u_n - 2} \text{ ومنه } u_n = 2 - \frac{2}{v_n - 1} = 2 + \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 4 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$(4) \text{ حساب } S_n : S_n = -\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = -3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\text{حساب } T_n : \text{لدينا } v_n = 1 - \frac{2}{u_n - 2} \text{ ومنه } v_n - 1 = -\frac{2}{u_n - 2} \text{ أي أن } \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

$$\text{ومنه } T_n = \frac{1}{2}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_{n-1}) \text{ وبالتالي } T_n = \frac{1}{2}(n - S_n) = \frac{1}{2}\left(n + 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)$$