



على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

* التمرين الأول : (04 نقاط)

- I. نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$
- (1) احسب $P(6)$ ، ثم أكتب $P(z)$ على الشكل $P(z) = (z - 6)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عدنان حقيقيان
- (2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
- II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق:
- (1) أ – اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي
 $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 6$
- ب – بين أن : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{203} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1444} = 0$
- ج – عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا موجبا
- (2) نضع : $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$
- أ – اكتب العدد Z على الشكل الأسّي
- ب – استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) عين طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|\bar{z} - 6| = |iz + \sqrt{3} - 3i|$

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

- يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها ثلاث كريات زرقاء مرقمة 0 ، 1 ، 2 ، وأربع كريات حمراء مرقمة 0 ، 1 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة 1 ، 2 ، 4
- ✓ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس :
- (1) أحسب احتمال ل حدث من الأحداث التالية :
- الحدث A : " سحب ثلاث كريات من نفس اللون "
- الحدث B : " سحب ثلاث كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2023 "
- الحدث C : " سحب ثلاث كريات تحمل أرقاما تشكل حدودا متتالية لمتتالية هندسية أساسها 2 "
- (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكريات المسحوبة التي تحمل الرقم 1
- أ – عرف قانون الاحتمال للمتغير X ، ثم أحسب أمله الرياضي
- ب – عين قيمة العدد الحقيقي b بحيث يكون : $E(10X + b) = 2032$
- ج – أحسب $P\left(X = \frac{6}{5-X}\right)$ ، $P(e^{X^2-X} = 1)$

* التمرين الثالث : (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 واساسها q ، حيث u_0 و q عدنان طبيعيين غير معدومين .

1- عين u_0 ، q علما أن u_0 أولي مع q و $3u_0^2 = u_3 - u_1$.

2- نفرض أن $u_0 = 8$ ، $q = 3$ و نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $W_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.
✓ أحسب S_n و W_n بدلالة n .

3- أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 13 .

ب) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $1444 - 2023^{1954} + 1962^{2022}$ على 13 .

4- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها S_n مضاعف للعدد 13

5- أ) بين أن 89 عدد أولي .

ب) عين القواسم الطبيعية للعدد 7832 ثم بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما .

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -x^3 + 1 - 2\ln x$

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $g(1)$ ؛ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا . ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ حيث: f' الدالة المشتقة للدالة f .

ب - أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 2$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب/ أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

4) بين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $0,6 < \alpha < 0,7$ ؛ $2,1 < \beta < 2,2$.

5) أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

6) ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda > 1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذو المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$.

أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب: $\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx$.

ب/ أحسب بدلالة λ ، المساحة $A(\lambda)$ ثم عين $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني

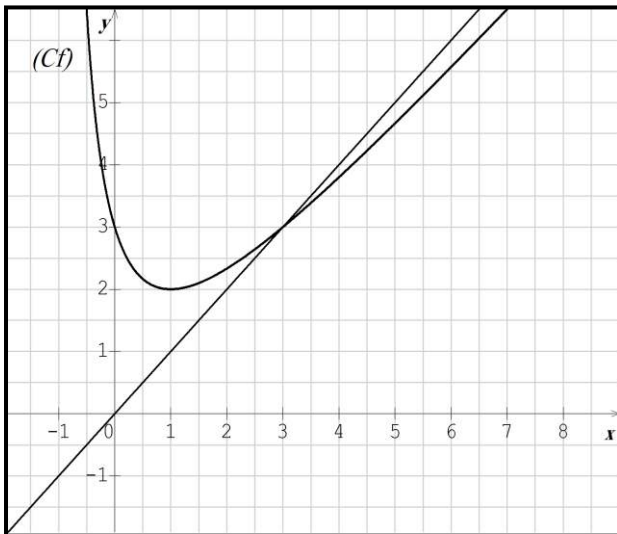
* التمرين الأول : (04 نقاط)

- نعتبر المعادلة (E) : $9x + 4y = 22$ حيث x و y عددين صحيحان .
- 1- أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حولا .
 ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 2[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .
- 2- N عدد طبيعي يكتب $133\alpha\beta 3$ في نظام التعداد ذو الأساس 4، ويكتب $56\alpha 0$ في نظام التعداد ذو الأساس 7 حيث α و β عددان طبيعيان .
- عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري
- 3- نضع $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ حيث n عدد طبيعي .
 أ) بين أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) .
 ب) باستعمال مبرهنة بيزو بين أن العددين $4n + 1$ و $9n + 2$ أوليان فيما بينهما .
 ج) جد $\text{PGCD}(a; b)$.

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

- يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الأرقام : 0،0،0،1،1،2، وكرتين سوداويين تحمل الأرقام : 0،1 .
 (لا نميز بينها باللمس) نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع .
1. احسب احتمال كل من الأحداث التالية :
1. A : للكرتين المسحوبتين نفس اللون
 2. B : للكرتين المسحوبتين نفس الرقم
 3. C : للكرتين المسحوبتين لونين مختلفين ورقمين مختلفين
 4. D : جداء الرقمين المسجلين على الكرتين معدوم
2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل عملية سحب للكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما
- أوجد قانون الاحتمال للمتغير X
 - أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير X

* التمرين الثالث : (05 نقاط)



- f دالة عددية معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$
- (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (أنظر الشكل المقابل)
- 1) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.
 أ/ أنقل الشكل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود التالية :
 u_0 ، u_1 ، u_2 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .
 ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
- 2) أ/ باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$.
 ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$ ،

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 3 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n \leq S_n \leq 3n + 8\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)$. ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على IR بـ : $g(x) = e^x - 2x - 1$.

- (1) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين فقط أحدهما معدوم والآخر α حيث : $1,25 < \alpha < 1,26$.
- (4) شكل جدول إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على IR^* بـ : $f(x) = x \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ، أعط تفسيراً هندسياً . (لاحظ أن : $f(x) = \frac{e^{2x}}{x \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2}$)

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من IR^* : $f'(x) = \frac{e^{2x} g(x)}{(e^x - 1)^3}$.

ب- بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة ماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $]0; \alpha]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

- (3) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
 ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

(4) أ- بين أن $f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$ ثم إستنتج حصراً لـ $f(\alpha)$.

ب- أنشئ (C_f) و (Δ) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 2.5$) .

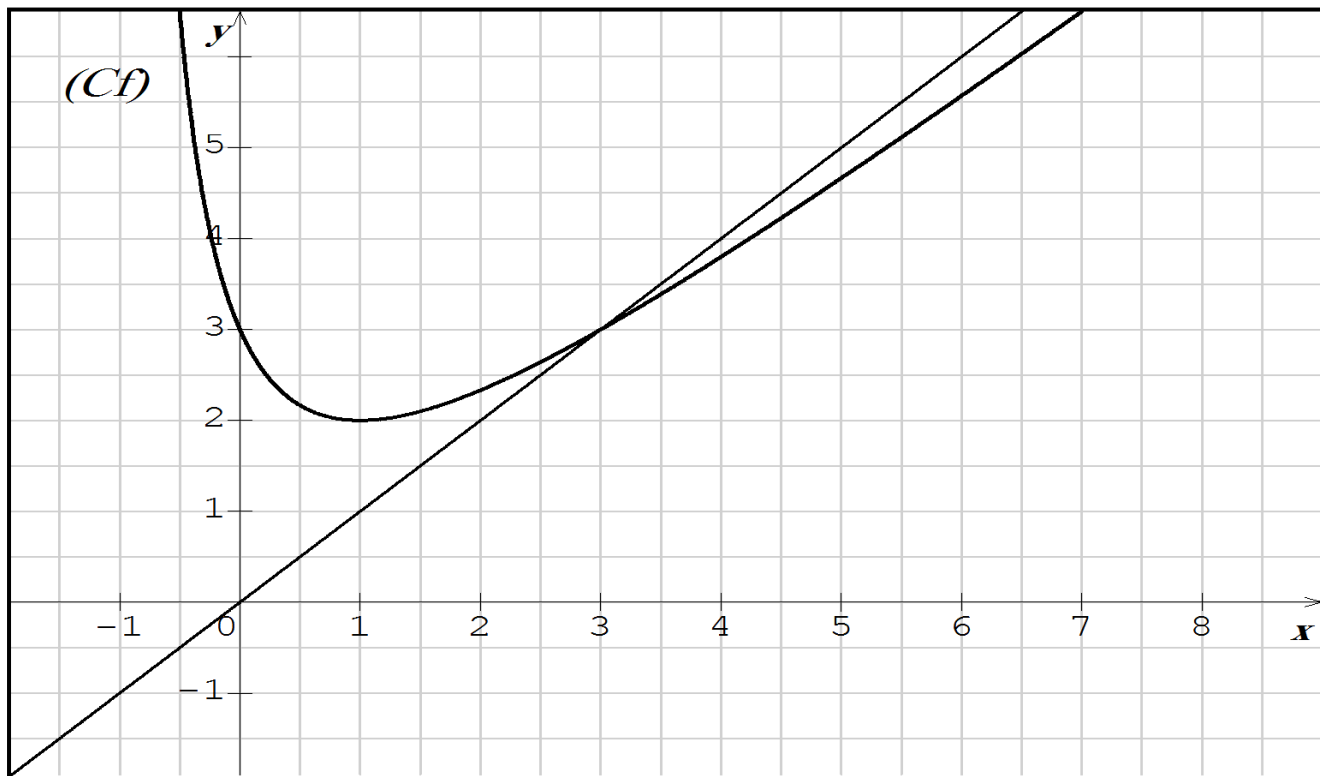
ج- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = |m|x$ حلاً وحيداً سالباً .

(5) أ- بين $\int_e^{e^2} \frac{2 - \ln x}{2x} = \frac{1}{4}$ ، ثم بإستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $\int_e^{e^2} \frac{2 + \ln x}{x^2} = \frac{4e - 5}{e^2}$.

ب- بين أن من أجل عدد حقيقي x من المجال $[e, e^2]$: $x + \frac{(2 - \ln x)}{2x} \leq f(x) \leq x + \frac{(2 + \ln x)}{x^2}$.

ج- إستنتج حصراً لمساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = e^2$.

اللقب و الاسم : القسم :



اللقب و الاسم : القسم :

