

الموضوع الثانيالتمرين الأول: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + 2^n \cdot u_n}$.

(1) احسب u_1 .

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

ب - ادرس رتبة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \frac{1}{2^n \cdot u_n}$.

أ - برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{1}{(n+2)2^{n-1}}$.

ج - احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 \cdot v_0 + u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n$.

أ - بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ب - عين أكبر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n \leq 1,9999$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة ولا فرق بينها عند اللمس) .
نعتبر اللعبة التالية : يقوم اللاعب برمي زهر نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء في الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء في الصندوق ، بعد ذلك يسحب اللاعب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

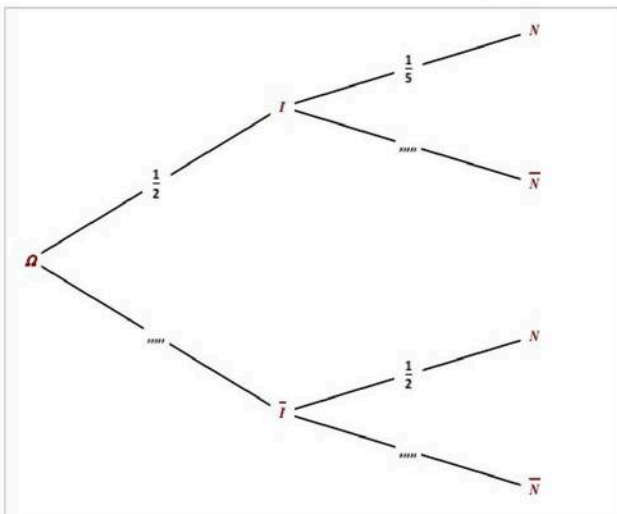
نعتبر الأحداث التالية : I " الرقم الظاهر فردي " ، N " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " .

(1) احسب الإحتمالات : $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_I(N)$ و $P(N \cap I)$.

(2) أ - أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تتمزج هذه التجربة ثم أكملها .

ب - بين أن : $P(N) = \frac{7}{20}$.

(3) علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟ .



(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ - بين أن : $P(X=1) = \frac{11}{20}$.

ب - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ج - أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكريات البيضاء المسحوبة ، ثم استنتج التباين $V(X)$.

التمرين الثالث: (03 نقاط)

نعتبر التكاملين التاليين : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{3e^x + 2}{e^x + 1} dx$ و $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1} dx$.

(1) أ - تحقق أن : $I - J = \int_0^{\ln 2} (1 - e^x) dx$.

ب - استنتج أن : $I - J = \ln 2 - 1$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1} = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$.

(3) احسب J ، ثم استنتج I .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$.

(1) احسب نهايتي الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .

(2) ادرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0,5; 0,6[$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x - 1$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر بيانيا النهاية عند 0 .

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) أ - اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

(4) أنشئ (T) ، ثم مثل (C_f) . (نضع : $f(\alpha) \approx -0,3$)

(5) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - |x| + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ - اثبت أن الدالة h زوجية .

ب - اشرح كيفية تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم مثله .

(6) m وسيط حقيقي ، نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة : $y = mx - m$.

أ - بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيها .

ب - ناقش بيانيا و حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - m$.

(7) أ - بين أن الدالة $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$.

ب - باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن العدد $A(\lambda)$ بدلالة λ حيث : $0 < \lambda < 1$ و $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (\ln x)^2 dx$.

ج - احسب بدلالة λ مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى (C_f) ، المماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتهما :

$$x = \lambda , x = 1$$

إنتهى الموضوع الثاني