



نوفمبر 2024

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

المدة : 2 سا

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$ (1) أدرس تغيرات الدالة g .(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1.3 < \alpha < -1.2$ (3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+2)(1 - e^{-x})$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (1) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = g(x)e^{-x}$ ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.(3) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.(4) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .(5) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) .ب) تحقق أن معادلة المماس (T) هي: $y = x + 2 - e$ (6) بين أن: $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$ ، ثم أعط حصرًا لـ $f(\alpha)$.(7) مثل بيانيا كل من (Δ) , (T) و (C_f) . (تعطى $f(\alpha) = -1.87$)(8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x}$

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

التمرين 1

(I) 1) دراسة تغيرات الدالة g

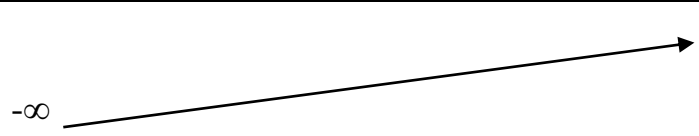
النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

الدالة المشتقة:

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x) = e^x + 1$

إشارة $g'(x)$: $g'(x) > 0$ لأن $1 > 0$ و $e^x > 0$ و منه g دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

(2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1.3 < \alpha < -1.2$

g دالة مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و منه مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-1.3 ; -1.2]$

لدينا $g(-1.2) = 0.10$; $g(-1.3) = -0.02$ و منه $g(-1.3) \times g(-1.2) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1.3 < \alpha < -1.2$

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	- 0 +		

(II) 1) النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = g(x)e^{-x}$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + (e^{-x})(x + 2)$$

و منه: $f'(x) = g(x)e^{-x}$

(3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

• إشارة $f'(x)$: من إشارة $g(x)$ لأن $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

و منه f دالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha)e^{-\alpha} = 0$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة α

(4) أ) نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - 2e^{-x}) = 0$$

اذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

لدينا $f(x) - y = 0$ معناه $-(x+2)e^{-x} = 0$ يكافئ $x+2=0$ لأن $e^{-x} \neq 0$ و منه $x = -2$.

إذن إشارة $f(x) - y$ من إشارة $-(x+2)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- على المجال $]-\infty; -2[$: (C_f) يقع فوق (Δ)
- على المجال $]-2; +\infty[$: (C_f) يقع تحت (Δ)

$$(C_f) \cap (\Delta) = A(-2; 0)$$

(5) أ) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) .

حل المعادلة $f'(x) = 1$ و منه $e^{-x}(e^x + x + 1) = 1$ أي $e^x + x + 1 = e^x$ و عليه $x + 1 = 0$ إذن $x = -1$

إذن يوجد مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة -1.

ب) التحقق أن معادلة المماس (T) هي: $y = x + 2 - e$

لدينا $f'(-1) = 1$ و $f(2) = 1 - e$ إذن : $(T): y = x + 2 - e$

$$(6) \text{ نبين أن : } f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$$

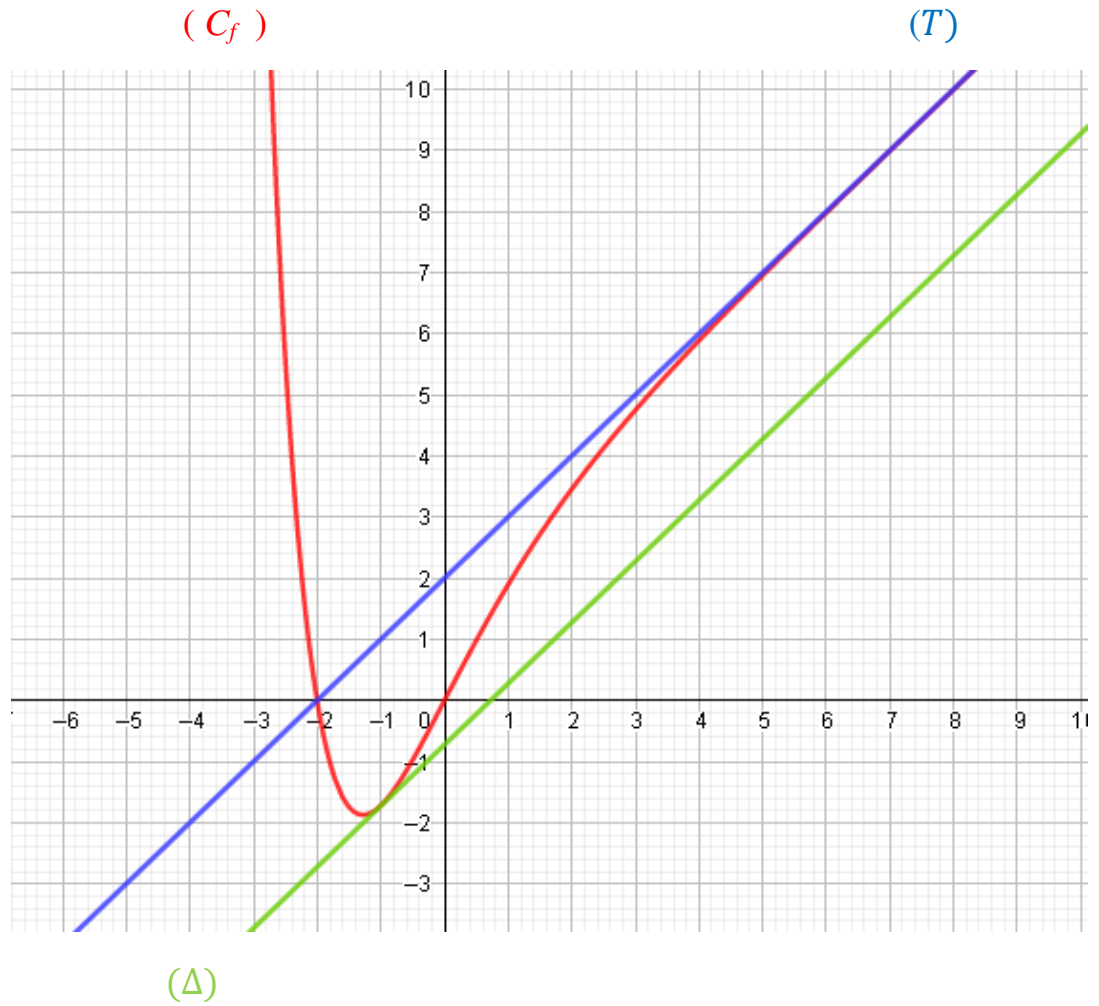
لدينا : $f(\alpha) = (\alpha+2)(1 - e^{-\alpha})$... (*)

و لدينا مما سبق: $g(\alpha) = 0$ و منه $e^{\alpha} = -(\alpha+1)$ أي $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha+1}$

بالتعويض في (*) نجد : $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$

حصر $f(\alpha)$: $-1.85 < f(\alpha) < -1.97$

(7) التمثيل بيانيا كل من (Δ) , (T) و (C_f) . (تعطى $f(a) = -1.87$)



(8) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x}$

لدينا $\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x}$ و منه $f(x) = x+m$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x+m$

- لما $m \in]-\infty; 2-e[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

- لما $m = 2-e$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد

- لما $m \in]2-e; 2[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين

- لما $m \in]2; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيد