

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_1 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{en} u_n$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n > 0$.

(ب) قارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 ، ثم استنتج اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N^* ، $v_n = \frac{1}{en} u_n$ ، بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدتها الأولى .

(3) جد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، ثم استنتج عبارة u_n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) احسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$.

(5) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$.

التمرين الثاني (05 نقط) :

نعتبر التكاملين J و I حيث : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$ و $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$.

(1) بين أن : $I = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$.

(2) احسب $I - J$ ، ثم استنتج قيمة J .

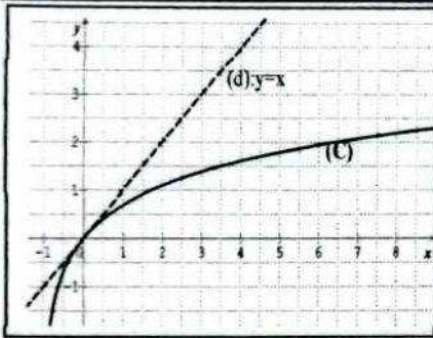
(3) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نعتبر العدد الحقيقي K_n المعروف كما يلي : $K_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{-x} \cdot \ln(e^{2x}-1) dx$.

باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب العدد K_2 .

(4) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن ، $\frac{2e^x}{e^{2x}-1} = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$ ،

(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = K_2 + K_3 + \dots + K_n$ ، ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثالث (09 نقط) :



(I) (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. كما هو موضح في الشكل المقابل

بقراءة بيانية ، برر أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $0 < \ln(1+x) < x$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R ب : $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, i, j) .

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$. (ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = 2x + \ln(1+e^{-3x})$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') يطلب تعيين معادلته .

(4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيمين (Δ) و (Δ') .

(5) انشئ (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

(6) λ عدد حقيقي موجب تماما ، المساحة المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=0$ و $x=\lambda$.

بين أن : $A(\lambda) < \frac{1}{3}$.

(7) الدالة العددية h المعرفة على R ب : $h(x) = f(|x|-1) + 1$ و (C_h) منحنىها البياني في المعلم السابق .

(ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه .

انتهى بالتوفيق

$$V_n = \frac{1}{e^n} U_n \quad \text{C (لينا)}$$

$$U_m = e^m V_m = m e^{-m} = \frac{m}{e^m}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} m e^{-m} = 0$$

$$T_m = \frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} + \dots + \frac{U_m}{V_m}$$

$$\frac{U_m}{V_m} = e^m \quad \text{C (لينا)}$$

$$T_m = e(1+2+3+\dots+m)$$

$$T_m = \frac{e}{2} m(m+1) = \frac{e(m^2+m)}{2}$$

$$P_m = \ln(U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots \times U_m) \quad (5)$$

$$P_m = \ln\left(\frac{1}{e} \times \frac{2}{e^2} \times \frac{3}{e^3} \times \dots \times \frac{m}{e^m}\right)$$

$$P_m = \ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m}{e^{1+2+3+\dots+m}}\right)$$

$$P_m = \ln(m!) - \ln\left(e^{\frac{m(m+1)}{2}}\right)$$

$$P_m = \ln(m!) - \frac{m}{2}(m+1)$$

$$P_m = \ln(m!) - \frac{m^2+m}{2}$$

$$U_{n+1} < U_n$$

وضوحاً (U_n) متناقصة

$$U_n > 0$$

بما أن (U_n) متناقصة

$$V_n = \frac{1}{e^n} U_n, \quad m \in \mathbb{N}^*$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{e^{n+1}} U_{n+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^n} U_n = \frac{1}{e} V_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{e} V_n$$

$$V_n = V_1 \times e^{-n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$U_{n+1} < U_n$$

$$S_n = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) \right] + \int_{e^{-n}-1}^{e^n-1} \frac{e^n}{e^n-1} \frac{e^n}{e^n+1} \frac{1}{e^n-1} dn$$

$$S_n = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) + \ln\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right) \right]$$

$$S_n = -\frac{1}{n+1} \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2} \ln(3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \left[-\frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2} \ln(3) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \times \frac{\ln(n)}{n} - \frac{n+1}{n+1} \times \frac{\ln(n+1)}{n+2} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2} \ln(3) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2} \ln(3)$$

$$K_m = \int_{e^{-n}}^{e^n} e^{-n} \times \ln(e^{2n}-1) dx \quad (3)$$

$$K_2 = \int_{e^{-2}}^{e^2} e^{-n} \times \ln(e^{2n}-1) dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(e^{2n}-1) \\ u' = \frac{2e^{2n}}{e^{2n}-1} \\ v' = e^{-n} \Rightarrow v = -e^{-n} \end{cases}$$

$$K_2 = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) \right] + \int_{e^{-n}-1}^{e^n-1} \frac{2e^n}{e^n-1} \frac{e^n}{e^n+1} \frac{1}{e^n-1} dn$$

$$K_2 = -\frac{1}{3} \ln(8) + \frac{1}{2} \ln(3) + 2J$$

$$K_2 = -2 \ln(2) + \frac{3}{2} \ln(3)$$

$$\frac{e^n}{e^n-1} - \frac{e^n}{e^n+1} = \frac{2e^n}{e^{2n}-1}$$

$$S_n = K_2 + K_3 + \dots + K_m$$

$$S_n = \int_{e^{-n}}^{e^n} e^{-n} \ln(e^{2n}-1) dx$$

$$S_n = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) \right]$$

$$+ \int_{e^{-n}-1}^{e^n-1} \frac{2e^n}{e^n-1} \frac{e^n}{e^n+1} \frac{1}{e^n-1} dx$$

$$I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\ln(e^{2x}-1) \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\ln(8) - \ln(3) \right]$$

$$I = \frac{1}{2} (3 \ln(2) - \ln(3)) = \frac{3}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3)$$

$$I - J = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1} dx$$

$$I - J = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} dx$$

$$I - J = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$I - J = \left[\ln(e^x+1) \right]$$

$$I - J = \ln(4) - \ln(3) = 2 \ln(2) - \ln(3)$$

$$J = I - 2 \ln(2) + \ln(3)$$

$$J = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

④ الوضع السيلبي (f) و (Δ)

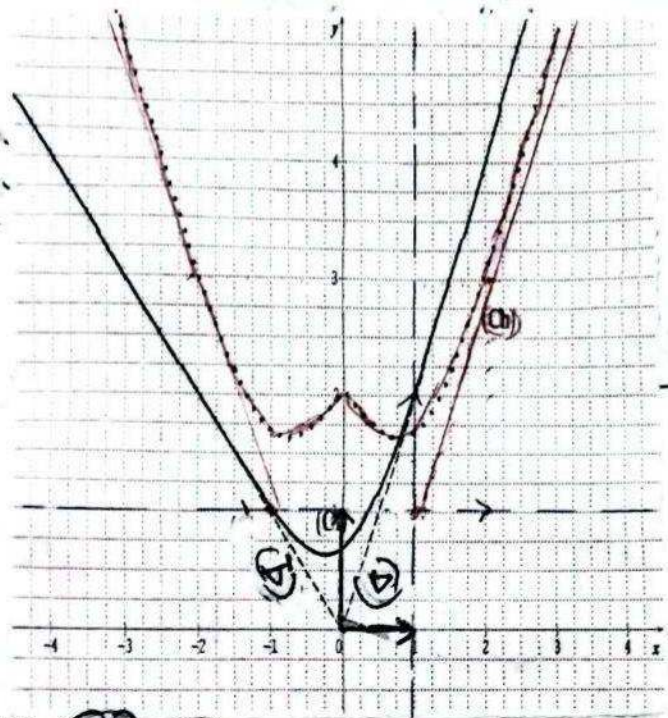
022 $f(x-y) = \ln(1+e^{-3x}) > 0$

ان (CH) فوق (Δ) و (R) ك (Δ)
الوضع السيلبي (CH) و (Δ')

022 $f(x-y) = \ln(1+e^{3x}) > 0$

ان (CH) فوق (Δ') و (R) ك (Δ')

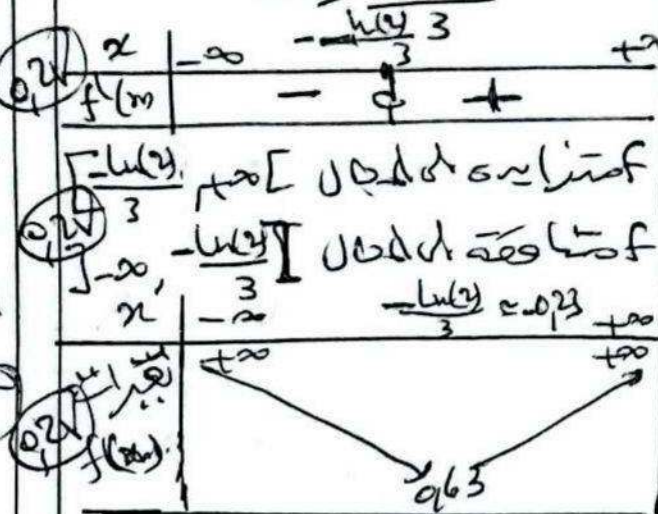
⑤ رسم (Δ) و (Δ') و (CH)



① 022 (CH)
② 022 (CH)
③ 011 (CH)
④ 011 (CH)
⑤ 011 (CH)
⑥ 011 (CH)
⑦ 011 (CH)
⑧ 011 (CH)
⑨ 011 (CH)
⑩ 011 (CH)
⑪ 011 (CH)
⑫ 011 (CH)
⑬ 011 (CH)
⑭ 011 (CH)
⑮ 011 (CH)
⑯ 011 (CH)
⑰ 011 (CH)
⑱ 011 (CH)
⑲ 011 (CH)
⑳ 011 (CH)
㉑ 011 (CH)
㉒ 011 (CH)
㉓ 011 (CH)
㉔ 011 (CH)
㉕ 011 (CH)
㉖ 011 (CH)
㉗ 011 (CH)
㉘ 011 (CH)
㉙ 011 (CH)
㉚ 011 (CH)
㉛ 011 (CH)
㉜ 011 (CH)
㉝ 011 (CH)
㉞ 011 (CH)
㉟ 011 (CH)
㊱ 011 (CH)
㊲ 011 (CH)
㊳ 011 (CH)
㊴ 011 (CH)
㊵ 011 (CH)
㊶ 011 (CH)
㊷ 011 (CH)
㊸ 011 (CH)
㊹ 011 (CH)
㊺ 011 (CH)
㊻ 011 (CH)
㊼ 011 (CH)
㊽ 011 (CH)
㊾ 011 (CH)
㊿ 011 (CH)

$3n \geq -\ln(2)$

$n \geq \frac{-\ln(2)}{3}$



$f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$

022 $f(x) = \ln[e^{2x}(1+e^{-3x})]$

$f(x) = 2x + \ln(1+e^{-3x})$

022 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)-y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-3x}) = 0$

022 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)+x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1+e^{3x})] = 0$

و من (CH) في كل مكان
ما ل (Δ') لوان - ما ل
① 022 (Δ): $y = -x$

التمرين (03) (09)

I من الرسم أن $\ln(1+x) < x$ لـ $x > 0$ ، ما ل (C) وهو ما ل
المستقيم (Δ) وهو، الفاصل
وبالتالي أن $\ln(1+x) < x$ لـ $x > 0$

022 $0 < \ln(1+x) < x$

II $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$, $\forall x \in \mathbb{R}$

022 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

022 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

022 $f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{-x}}{e^{2x} + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x}$

022 $f'(x) = \frac{2e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1}$

III اشارة $f'(x)$ في اشارة اشارة
 $e^{3x} + 1 > 0$ لـ

022 $f'(x) \geq 0$ لـ
 $2e^{3x} - 1 \geq 0$
 $e^{3x} \geq \frac{1}{2}$

