الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبي
الشعبة : تقني رياضي

ثانوية ابن عليوي صالح
دورة ماي 2021

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 سا

اختر احد الموضوعين الاتيين

الموضوع الاول

التمرين الأول (4.5 نقاط)

1/ (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول V_0 و أساسها q حيث $\begin{cases}\ln V_0 + \ln V_2 = 2ln2 \\ e^{V_0} \times e^{V_1} = e^6\end{cases}$

ا) احسب V_1 و V_0 ثم استنتج قيمة الأساس q

ب) نضع $V_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$ عبر عن V_n بدلالة n ثم احسب $\lim V_n$

ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \ldots\ldots\ldots + \ln V_n$

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة $\mathbb{N}$ على بـ: $U_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{9U_n + 10}$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq U_n \leq 10$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - U_n)$

د) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 10 - U_n \leq V_n$

ه) استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثاني (4 نقاط)

اختر الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية

1/ - صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية زرقاء جميع الكرات متماثلة .نسحب عشوائيا كرية واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان امله الرياضياتي هو:

ا) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) 1

- نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2 ونسحب كرية من الصندوق U_1 و كرية من الصندوق U_2

فأن قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي

ا) 1 ب) 2 ج) 3

2/ - الشكل الاسي للعدد المركب $Z = -\sin\theta + i\cos\theta$ هو

ا) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ب) $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ج) $e^{i(\pi-\theta)}$

- العدد : $(1+i)^{1442}$ يساوي

ا) 2^{721} ب) $i\,2^{721}$ ج) $2^{721}(1+i)$

التمرين الثالث (4.5 نقاط)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول (x,y) التالية $2021x - 2020y = 5 \quad \ldots (E)$

ا) بين ان العددين 2020 و 2021 اوليان فيما بينهما و استنتج ان المعادلة (E) تقبل حلولا

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (E) فان $x \equiv 0[5]$

ج) استنتج حلا خاصا $(x_0\,,y_0)$ حيث $2022 \leq x_0 \leq 2027$ ثم حل المعادلة (E)

2/ عين الاعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv 5\ [2020] \\ a \equiv 0\ [2021] \end{cases}$

3/ ا) ادرس و حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0[9]$

ج) عين الثنائيات $(x\,,y)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث : $5^{y-x} \equiv 8[9]$

التمرين الرابع (7 نقاط)

I- g الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - (2x+1)lnx$

1/ ا) احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g'

ب) بين انه من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ $g'(x) < 0$

ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و 0 ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.83 < \alpha < 1.84$

3/ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- f الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o.\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ وحدة الطول

(على محور الفواصل $1cm$ و على محور التراتيب $4cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا

2/ ا) بين انه من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3/ بين ان $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4/ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5/ أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f)

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

7/ نعتبر الدالة h المعرفة على $]0\,,+\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

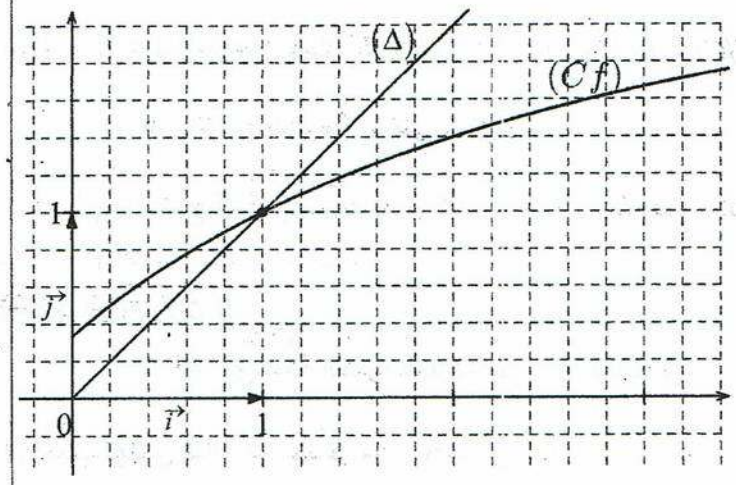
ادرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن):

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$



و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

α عدد حقيقي موجب . (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

II) نضع في كل ما يلي $\alpha=0$

1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

ب) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+.....+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

5) احسب بدلالة n المجموع T حيث: $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+.....+\ln(|v_{n+2019}|)$

التمرين الثاني(4 ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

5 كريات حمراء مرقمة كما يلي: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 كريات خضراء مرقمة كما يلي : 0 ، 0 ، 1 ، 2 ، 2

نسحب عشوائيا من الكيس 4 كريات في آن واحد

1) أحسب احتمال كلا من الأحداث التالية :

A : الحصول على 4 كريات من نفس اللون
B : الحصول على 4 كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020
C : الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر من بين الأرقام الأربعة

أ) عين قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون احتماله
ب) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X
ج) احسب احتمال الحدث : $|X-1|=1$

التمرين الثالث(4,5 ن):

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5

3) بين أن العدد 131 أولي

4) a و b عددان طبيعيان حيث $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$

ب) استنتج قيمة n بحيث يكون $7<n<15$ ؛ ثم عين الثنائيات (a,b)

التمرين الرابع(7 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$

1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x+3-xe^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

3) أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

4) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما على الترتيب α و β حيث:

$-3,05<\alpha<-3$ و $0,75<\beta<0,8$

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج- أنشئ (T) ؛ (Δ) و (C_f)

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=x+m$

6) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب- أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة الدالة h')

الموضوع الثاني لدورة جوان 2021 للشعبة: تقني رياضي

التمرين الأول: (4 نقاط)

(1) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وبالعلاقة $u_{n+1} = \frac{9u_n + 10}{u_n + 6}$

u_0 عددان حقيقيان موجبان تماما بحيث $\ln u_0 + \ln v_2 = 2\ln 2$ و $e^{v_0} \times e^{v_1} = e^6$

أ) (v_n) متتالية حسابية، أساسها r والحد الأول v_0

$\ln u_0 + \ln v_2 = 2\ln 2$ و $e^{v_0} \times e^{v_1} = e^6$

$v_1^2 = 4$ و $\ln u_0 + \ln v_2 = 2\ln 2$ تكافئ $v_0 + v_2 = 6$ و $v_1 > 0$

$v_0 + v_1 + v_2 = 6$ تكافئ $v_0 + v_2 = 6$ و $v_1 = 2$

$v_0 = 4$ و $v_1 = 2$ ومنه $r = \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}$

ب) $u_n = v_0 q^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

ج) $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n$

$\ln u_n = (-\ln 2)n + \ln 4$ حيث $w_n = (\ln 2)n + \ln 4$ حيث $r = -\ln 2$ و $w_0 = \ln 4$ أساسها (w_n)

$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

$= \frac{n+1}{2}[(-\ln 2)n + 2\ln 4]$

(2) $u_{n+1} = \sqrt{9u_n + 10}$; $u_1 = 6$

أ) البرهان بالتراجع أن $6 \le u_n \le 10$

من أجل $n = 0$ لدينا $6 \le u_0 \le 10$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة: $6 \le u_n \le 10$ ونبرهن صحة $P(n+1)$: $6 \le u_{n+1} \le 10$

$54 \le 9u_n \le 90$ ومنه $6 \le u_n \le 10$

$64 \le 9u_n + 10 \le 100$ ومنه

$8 \le \sqrt{9u_n + 10} \le 10$ ، $6 \le 8$

$6 \le u_{n+1} \le 10$

$6 \le u_n \le 10$ $n \in \mathbb{N}$ ومنه (u_n) محدودة

ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 9u_n + 10}{\sqrt{9u_n + 10} + u_n}$

$-x^2 + 9x + 10 = 0$ تكافئ $x = u_n$

$x_2 = 10$ $x_1 = -1$

x	$-\infty$	-1	6	10	$+\infty$
$-u_n^2 + 9u_n + 10$		0	$+$	0	
$\sqrt{9u_n + 10} + u_n$		$+$	$+$	$+$	

$u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما

ج) (u_n) متزايدة ومحدودة من 1 فهي متقاربة نحو ℓ حيث $\ell \in [6; 10]$

$10 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(10 - u_n)$

$10 - u_{n+1} = \frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}(10 - u_n)$

$64 \le 9u_n + 10 \le 100$ ومنه $6 \le u_n \le 10$

$8 \le \sqrt{9u_n + 10} \le 10$ ومنه

$18 \le 10 + \sqrt{9u_n + 10} \le 20$ ومنه $\frac{1}{18} \ge \frac{1}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}$

ومنه $\frac{9}{18} \ge \frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}$

$\frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}} \le \frac{1}{2}$

$\frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}(10 - u_n) \le \frac{1}{2}(10 - u_n)$

$10 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(10 - u_n)$

$0 \le 10 - u_n \le v_n$ ومنه $u_n \le 10$

$0 \le 10 - u_n$ ومنه $u_n \le 10$

$10 - u_n \le v_n$ ؟

$10 - u_n \le \frac{1}{2}(10 - u_{n-1})$

$10 - u_2 \le \frac{1}{2}(10 - u_1)$

$10 - u_n \le \frac{1}{2}(10 - u_{n-1})$

$(10 - u_1)(10 - u_2) \cdots (10 - u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (10 - u_0)$

$(10 - u_n) \le (10 - u_{n-1})$

$\frac{(10 - u_1)(10 - u_2) \cdots (10 - u_n)}{(10 - u_1)(10 - u_2) \cdots (10 - u_{n-1})} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (10 - u_0)$

$10 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n 4$

$10 - u_n \le v_n$

$0 \le 10 - u_n \le v_n$ ومنه

$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ لأن

حسب مبرهنة الحصر

$\lim_{n\to+\infty} 10 - u_n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 10$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1) u_1 يأخذ القيمة 4 أو 6 أو 9

u_2 يأخذ القيمة 3 أو 5 أو 7

u_2 يأخذ القيمة 3 إذا وفقط إذا كان u_1 يأخذ القيمة 4 أو 6

$C_4^1 \times C_4^1 = 40$ عدد الحالات الممكنة

X يأخذ القيمة 0 إذا كان u_1 يأخذ القيمة 4 أو 6

احتمال أن X يأخذ القيمة 0 هو $\frac{2}{5}$

X متغير عشوائي يأخذ القيم $\{0; 1\}$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{24}{40}$	$\frac{16}{40}$

$P(X=0) = \frac{C_6^1 \times C_4^1}{40} = \frac{24}{40}$

$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_4^1}{40} = \frac{16}{40}$

$E(X) = 0 \times \frac{24}{40} + 1 \times \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

(2) u_n عدد زوجي $\Leftrightarrow$ n عدد زوجي

u_1 عدد زوجي $\Leftrightarrow$ $n+4$ عدد زوجي

u_2 عدد زوجي $\Leftrightarrow$ n عدد فردي

$C_{n+4}^1 \times C_{n+4}^1$ هو عدد حالات الحصول على u_n عدد زوجي

$C_{n+4}^1 \times C_{n+4}^1 = (n+4)(n+4)$

$= n^2 + 14n + 40$

$P(A) = \frac{C_6^1 \times C_4^1 + C_{n+4}^1 \times C_{n+3}^1 + C_{n+4}^1 \times C_{n+4}^1}{n^2 + 14n + 40}$

$= \frac{6 + (n+4)(n+3) + n + 4}{n^2 + 14n + 40}$

$= \frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40}$

$\frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40} = \frac{7}{12}$ أي $P(A) = \frac{7}{12}$

$5n^2 - 2n - 16 = 0$

$\Delta = 324$ $n = -\frac{8}{5}$ $n = 2$

$n = 2$

(3) $z = -\sin\theta + i\cos\theta$ عدد مركب حيث

$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$

$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ و $-\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

أ) $(1+i)^{1442} = i2^{721}$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$(1+i)^{1442} = (\sqrt{2})^{1442}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1442}$

$= 2^{721}\left(e^{i\frac{1442\pi}{4}}\right)$

$= 2^{721}\left(\cos\left(360\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(360\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 2^{721}(0 + i) = i2^{721}$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

(E) ... $2021x - 2020y = 5$ ①

$2020 = 2^2 \times 5 \times 101$ ②

$2020 = 43 \times 47$

$PGCD(2020, 2021) = 1$

العددان 2020 و 2021 أوليان فيما بينهما، المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل ④

(x_0, y_0) حل للمعادلة (E)

$2021x_0 - 2020y_0 = 5$ ⑤

$2021x = 2020y + 5$ ومنه

$2021x = 5[404y + 1]$

5 يقسم 2021، $2021x \equiv 0[5]$

$x \equiv 0[5]$ ومنه،

$x = 5k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ $x \equiv 0[5]$

$2022 \le x_0 \le 2027$ ⑥

$2022 \le 5k \le 2027$ ومنه،

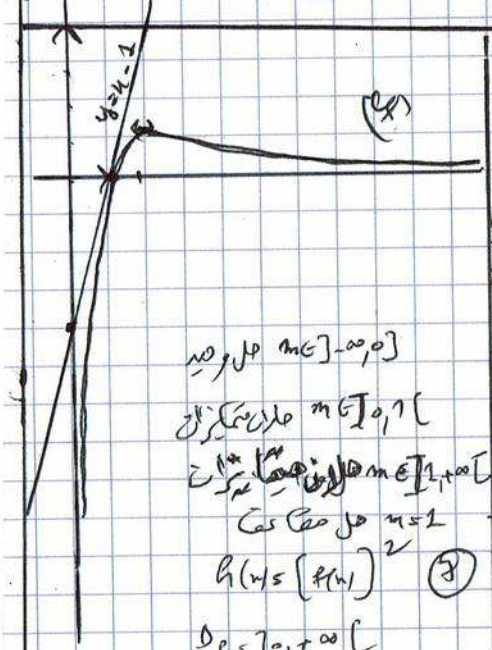
$404{,}4 \le k \le 405{,}4$ $k = 405$

$2021(2025) - 2020y_0 = 5$ ومنه، $x_0 = 2025$

بالتعويض نجد، $y_0 = 2026$

ومنه $\begin{cases} 2021x - 2020y = 5 \\ 2021(2025) - 2020(2026) = 5 \end{cases}$

$2021(x - 2025) = 2020(y - 2026)$



من أجل كل $m \in]-\infty, 0]$

المعادلة لا تقبل حلول

من أجل كل $m \in]0,1[$

المعادلة تقبل حلين متمايزين

من أجل $m=1$

المعادلة تقبل حل مضاعف

(3) $h(x) = [f(x)]^2$

$D_h =]-1, +\infty[$

$h'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$

x	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	ϕ	$-$
$f(x)$	$-$	ϕ	$+$	$+$
$2f'(x)f(x)$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$

$[\alpha, +\infty[$ و $]0,1[$ متقايسة على

$[1, \alpha]$ و $]0,1[$ متقايسة على h

x	0	1	α	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow (f(\alpha))^2$	$\searrow 0$

$D =]0, +\infty[$; $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$ (II

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ $\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)$ (1

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} \times \frac{1}{x+1} = 0 \times 0 = 0$

x	0	$+\infty$
x^2+x	$+$	

g تزايدية تماما على $]0, +\infty[$ و $g(1) = 0$

$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - (2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$ (2

$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$; $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	ϕ	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow f(\alpha)$	$\searrow 0$

f متزايدة تماما على $]0, \alpha]$

و متناقصة تماما على $[\alpha, +\infty[$

$f(\alpha) = \frac{2\ln \alpha}{\alpha^2+\alpha}$ (3

$\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ أي $g(\alpha) = 0$

$f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

$1,83 < \alpha < 1,84$ $f(\alpha)$ حصر

$0,232 < f(\alpha) < 0,234$ أي

(4 معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = x - 1$

الصفحة 1 من 5

(5 الوضع النسبي

$f(x) - mx - m$

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = mx - m$

في النقطة $A(1,0)$ لأن $m(1) - m = 0$

(III

$g(x) = x + 1 - (2x+1)\ln x$

$D_g =]0, +\infty[$

$g'(x) = 1 - 2\ln x - \frac{2x+1}{x}$ (1

$g''(x) = -\frac{2x+1}{x^2}$ (2

$x = \frac{1}{2}$ حيث $g''(x) = 0$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g''(x)$	$\|$	$+$	ϕ	$-$

g' متزايدة تماما على $]0, \frac{1}{2}]$

و متناقصة تماما على $[\frac{1}{2}, +\infty[$

(3

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g''(x)$	$\|$	$+$	ϕ	$-$
$g'(x)$	$\|$	$\nearrow 3+2\ln 2$	$\searrow$

$g'(\frac{1}{2}) = -3 + 2\ln 2 \approx -1,61$

$g'(x) < 0$ على $]0, +\infty[$ إذن g متناقصة تماما على $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (4

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left[1 + \frac{1}{x} - 2\ln x - \frac{\ln x}{x}\right]$

$= -\infty$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	ϕ	$-$
$g(x)$	$\|$	$+\infty \nearrow g(\alpha) \searrow -\infty$	

$1,83 < \alpha < 1,84$ حيث $g(x) = 0$ (5

$[1,83; 1,84]$ على g متناقصة تماما و g مستمرة

$g(1,84) = -0,013$ $g(1,83) = 0,013$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد

$g(\alpha) = 0$ حيث $1,83 < \alpha < 1,84$

(6

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$+$	ϕ	$-$

$5^{8-n} \equiv 8 [9]$ (I

$5^{2021k+2026-2020k-2025} \equiv 8 [9]$

$5^{k+1} \equiv 8 [9]$

$k+1 = 6k'+3$ أي

$k = 6k'+2$ أي

$y = 2021(6k'+2) + 2026$

$y = 12126k' + 6058$

$x = 2020(6k'+2) + 2025$

$x = 12120k' + 6065$

$S = \{(12120k'+6065, 12126k'+6058) / k' \in \mathbb{Z}\}$

$1442^{1440n+12} \equiv 2^{1440n+12} [9]$

$\equiv 2^{3(480n+4)} [9]$

$\equiv 8^{480n+4} [9]$

$\equiv (-1)^{480n+4} [9]$

$\equiv 1 [9]$

$2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv$

$\equiv 4+1+4 [9]$

$\equiv 0 [9]$

$2021 \mid 2020(y-2026)$ أي

بما أن 2020 و 2021 أوليان فيما بينهما

$y - 2026 = 2021k$ و $2021 \mid y - 2026$

$y = 2021k + 2026$ أي

$2021(x-2025) = 2020(2021k)$ أي

$x = 2020k + 2025$ أي

$S = \{(2020k+2025, 2021k+2026) / k \in \mathbb{Z}\}$

(II

$5^n \equiv a [2020]$ (1

$a \equiv 0 [2021]$

$\begin{cases} a = 2020q + 5 \\ a = 2021\beta \end{cases}$

$2020q + 5 = 2021\beta$

$2021\beta - 2020q = 5$ أي

$\beta = x = 2020k + 2025$

$q = y = 2021k + 2026$

$a = 2020(2021k+2026) + 5$

$= 4084240k + 4092525$

5^n من مضاعفات 5 و 5^n لا يقبل القسمة على 9

$5^1 \equiv 5 [9]$ $5^0 \equiv 1 [9]$ $5^2 \equiv 7 [9]$

$5^3 \equiv 8 [9]$ $5^4 \equiv 4 [9]$ $5^5 \equiv 2 [9]$

$5^6 \equiv 1 [9]$ باقي القسمة على 9 لـ n دوري دوره 6

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n \equiv$	1	5	7	8	4	2 [9]

(2

$2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0 [9]$

$2021^{1962n+1954} \equiv 5^{1962n+1954} [9]$

$\equiv 5^{6 \times 327n + 325 \times 6 + 4} [9]$

$\equiv 5^{6 \times 327n} \times 5^{325 \times 6 + 4} [9]$

$\equiv 1 \times 4 [9]$

$\equiv 4 [9]$

تصحيح الموضوع 2 - بكالوريا تجريبي
في الرياضيات تقني رياضي
- 2021 -

التمرين الأول (4,5 ن)

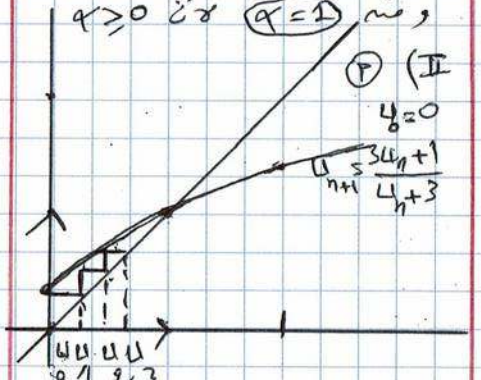
$D=[0,+\infty[$ $\quad f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$

I) (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=q$

$u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$ ، $u_0=q$

$q=1$ أي $q=\frac{3q+1}{q+3}$ من أجل

$q\geq 0$ و $q\neq 1$ من أجل



1) (u_n) متتالية متقاربة ما وسعاتها 1

2- البرهان بالتراجع على n طبيعي: $0\leq u_n<1$

من أجل $n=0$ $\quad 0\leq u_0<1$ صحيحة

$P(0)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة، أي $0\leq u_n<1$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة، أي $0\leq u_{n+1}<1$ ؟

لدينا f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ و $0\leq u_n<1$

$f(0)\leq f(u_n)<f(1)$ ومنه $0\leq u_{n+1}<1$

أي $0\leq \frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}\leq u_{n+1}<1$

ومنه $0\leq u_{n+1}<1$

من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n<1$

ومنه (u_n) محدودة

$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\frac{1-u_n^2}{u_n+3}$ (ب

$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$

لدينا $0\leq u_n<1$ ومنه $0\leq 1-u_n<1$ / $1\leq u_n+1<2$ / $3\leq u_n+3<4$

$u_{n+1}-u_n>0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما

ج) (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 ومنه متقاربة نحو عدد ≤ 1

د) (v_n) متتالية هندسية

$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ (3

$v_{n+1}=v_n\times q$ حيث (v_n) هندسية (ب

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{2u_n-2}{4u_n+2}$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\frac{1}{2}v_n$

ومنه $q=\frac{1}{2}$ أساسها (v_n) متتالية هندسية

$v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=-1$ حدها الأول

$v_n=v_0\,q^n=-1\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (ب

$v_n u_n+v_n=u_n-1$ أي $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

$u_n=\frac{-v_n-1}{v_n-1}$ ومنه $u_n(v_n-1)=-v_n-1$ ومنه

$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{-1}{-1}=1$ ، $u_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأن

$-1<\frac{1}{2}<1$

$S_n=1+\frac{v_{2021}}{v_{2020}}+\frac{v_{2022}}{v_{2020}}+\dots+\frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$ (4

$=\frac{v_{2020}+v_{2021}+v_{2022}+\dots+v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\frac{1}{v_{2020}}\left[v_{2020}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right]$

$=-2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$T_n=\ln|v_n|+\ln|v_{n+1}|+\dots+\ln|v_{n+2019}|$

$\ln|v_n|=\ln\left|-1\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|=\ln\left|-1\right|\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لدينا

$\ln(|v_n|)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-n\ln 2$

ومنه (w_n) متتالية حسابية حيث $w_n=(-\ln 2)n$

أساسها $r=-\ln 2$ و $w_0=0$

$T_n=w_n+w_{n+1}+\dots+w_{n+2019}$ / لدينا 2020 حد

$=\frac{2020}{2}\left[w_n+w_{n+2019}\right]$

$=1010\left[(-\ln 2)n+(-\ln 2)(n+2019)\right]$

$T_n=1010\left[(-2\ln 2)n+(-\ln 2)(2019)\right]$

التمرين الثاني (4 ن)

1) A: "سحب 4 كريات من الصندوق الأول"

$P(A)=\frac{C_5^4+C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{21}$

B: "سحب 4 كريات من الصندوق الثاني"

$P(B)=\frac{C_3^2\times C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{18}{210}=\frac{3}{35}$

C: "سحب 4 كريات من الصندوق الثاني"

$P(C)=\frac{C_3^2\times C_4^2+C_3^1\times C_3^2\times C_4^1}{210}=\frac{9}{35}$

2) X تأخذ القيم: 1 أو 2

$P(X=1)=\frac{C_6^4}{210}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$

ومنه $P(X=2)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	1/14	13/14

$E(X)=\sum_{i=1}^{2} p_i x_i$ (ب

$=\frac{1}{14}+\frac{26}{14}=\frac{27}{14}$

ج) $X-1=-1$ أي $X=1$ حيث $|X-1|=1$

$X=0$ ، أي $X=2$ حيث

$P(|X-1|=1)=P(X=2)=\frac{13}{14}$

التمرين الثالث (4,5 ن)

1) $5\nmid 2^n$ لأن

$2^3\equiv 3[5]$ / $2^2\equiv 4[5]$ / $2^1\equiv 2[5]$ / $2^0\equiv 1[5]$

4 هو أول عدد طبيعي غير معدوم حيث $2^4\equiv 1[5]$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	///
$2^n\equiv$	1	2	4	3	[5]

2) $5\mid(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1})$ لأن

لدينا $2014\equiv 2^2[5]$ ومنه $2014\equiv 4[5]$

$2014^{2n+1}\equiv 2^{4n+2}[5]$ أي $2014^{2n+1}\equiv(2^2)^{2n+1}[5]$

$\equiv 4[5]$

$2\times 2016^{8n}\equiv 2[5]$ ومنه $2016^{8n}\equiv 1[5]$ ومنه $2016\equiv 1[5]$

$2017^{4n+3}\equiv 3[5]$ ومنه $2017^{4n+3}\equiv 2^{4n+3}[5]$ ومنه $2017\equiv 2[5]$

$2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 4-2+3[5]$ أي

$\equiv 0[5]$

ومنه العدد يقبل القسمة على 5

3) $\sqrt{131}\simeq 11,44$

11, 7, 5, 3, 2 هي الأعداد الأولية التي مربعها أصغر من 131

131 عدد أولي ومنه

4) $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

$\begin{cases} 3m+7d=2^n-48 \\ a\times b=5m \end{cases}$

$D_h = \mathbb{R}^*$ $h(x) = \frac{1+3x-e^{2x}}{x}$ ⑥

$h(x) = f(\frac{1}{x})$; $\mathbb{R}^*$ على h ⑥

$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}+3-\frac{1}{x}e^{2(\frac{1}{x})}$

$= \frac{1+3x-e^{2x}}{x} = h(x)$

$h(x) = f(\frac{1}{x})$

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'(\frac{1}{x})$ (مشتقة مركبة)

$\frac{1}{x}>0$ و $x>0$ ، $\frac{1}{x}<0$ و $x<0$

$f'(\frac{1}{x})$ ، $f'(x)$ من إشارة

و $-\frac{1}{x^2}<0$ لأن

$h'(x)$ من إشارة $f'(\frac{1}{x})$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	
$h(x)$	3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f(\frac{1}{x})$ $(\frac{1}{x}\to 0)$

$= f(0) = 3$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 3$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$ $(\frac{1}{x}\to-\infty)$

$x\to 0$ و $x>0$

$= -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$

$x\to 0$ و $x<0$

$= -\infty$ $(\frac{1}{x}\to+\infty)$

$f(x)=0$ حيث $[0,75;0,8]$ على f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0,75;0,8]$ ، f

$f(0,8)\approx -0,16$ $f(0,75)\approx 0,388$

$f(0,75)\times f(0,8)<0$ لأن

$f(\beta)=0$ و $0,75<\beta<0,8$ بحيث β يوجد عدد حقيقي وحيد

(ب) تحديد وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

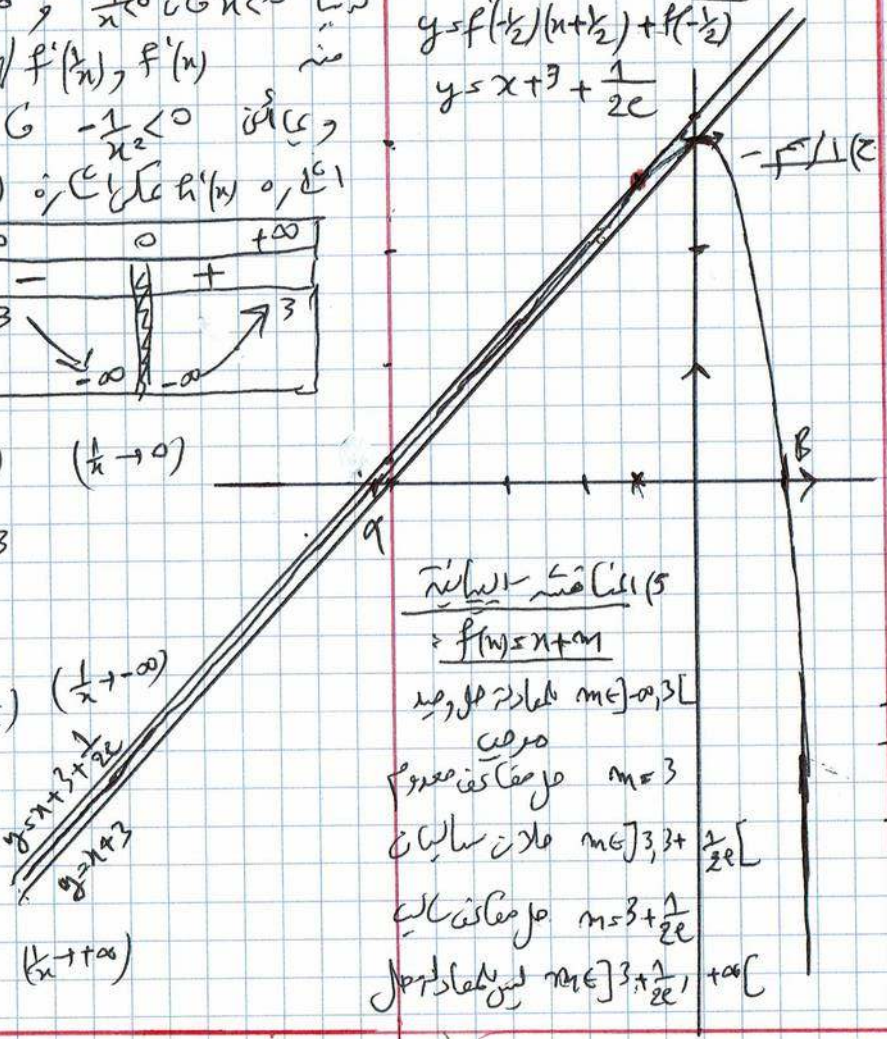
$1-(1+2x)e^{2x}=1$ إذا $g(x)=1$ إذا $f'(x)=1$

$1+2x=0$ أي $-(1+2x)e^{2x}=0$ أي

$x=-\frac{1}{2}$

$y = f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})$

$y = x+3+\frac{1}{2e}$



(ج) إثبات أن المعادلة $f(x)=x+m$:

المعادلة تقبل حلا وحيدا إذا وفقط إذا كان $m\in]-\infty,3[$

حلان متمايزان إذا وفقط إذا كان $m\in]3,3+\frac{1}{2e}[$

حل مضاعف إذا وفقط إذا كان $m=3+\frac{1}{2e}$

لا تقبل حلا إذا وفقط إذا كان $m\in]3+\frac{1}{2e},+\infty[$

g دراسة تغيرات الدالة

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	$1+e^{-2}$	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$g(0)=0$ ③

II $D=\mathbb{R}$ $f(x)=x+3-xe^{2x}$

① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+3-\frac{1}{2}(2xe^{2x}) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-e^{2x}\right) = -\infty$

② $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+3) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}(2xe^{2x}) = 0$

$-\infty$ بجوار (Δ) مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ معادلته $y=x+3$

ب) الوضعية :

$f(x)-(x+3) = -xe^{2x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)		A		$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)

$(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) تتقاطعان في $A(0;3)$

ج) $\mathbb{R}$ على f' دراسة إشارة

$f'(x) = 1-(e^{2x}+2xe^{2x})$

$= 1-(1+2x)e^{2x} = g(x)$

$g(x)$ من إشارة $f'(x)$ ، إذن

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

f متزايدة تماما على $]-\infty,0]$ و متناقصة تماما على $[0,+\infty[$

④ $f(-3,05)\times f(-3)<0$ لأن $f(-3,05)\approx -0,043$ $f(-3)\approx 0,0074$

$-3,05<\alpha<-3$ بحيث α يوجد عدد حقيقي وحيد $f(x)=0$ حل المعادلة

$d = PGCD(a;b) = 5$ يعني $a\times b = 5m$

من البرهان السابق، a' و b' أوليان فيما بينهما

$PGCD(a';b')=1$ ، $b=5b'$ $a=5a'$

$m = \frac{a\times b}{d} = a'b'd$ إذن

حيث $3m+7d=2^n-48$

أي $3a'b'd+7d=2^n-48$

أي $3(5a'b')+7(5)=2^n-48$

$2^n = 5[3a'b'+7+9]+3$

$2^n \equiv 5[3a'b'+16]+3$

أي $2^n \equiv 3[5]$ ① من حساب سابق

$n=4k+3$

$7<4k+3<15$ حيث $7<n<15$ ①

$n=11$ من $k=2$ أي $1<k<3$ من

$2^n = 5[3a'b'+16]+3$ أي

$2045 \equiv 5[3a'b'+16]$ أي

$a'b'=131$ ، $a'b'$ عدد أولي، أي 131

$(a';b') = (1;131)$ أي

$(131;1)$

$(a;b)\in\{(5;655),(655;5)\}$ من

التمرين ④ و ⑦ :

$D=\mathbb{R}$ $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$ (I

① $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1-e^{2x}-2xe^{2x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -[2e^{2x}+2e^{2x}(2x+1)]$

$= (-4x-4)e^{2x}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-4x-4$		$+$	0	$-$	

g متزايدة تماما على $]-\infty,-1]$