

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ب: $u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{4+u_n}$.

(1) أ) برهن بالتراجع من أجل كلّ عدد طبيعي n أن: $1 \leq u_n$.
ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أ) برهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{5}(u_n - 1)$.

ب) برهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

(3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

أ) برهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $n \leq S_n \leq n + \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$.

ب) استنتج كلا من $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) كما هو مبين في الشكل المقابل

(1) أحسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ مع تفسير النتائج هندسيا.

(2) أحسب A مساحة الجزء المظلل في الرسم.

(3) (I_n) المتتالية المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n ب:

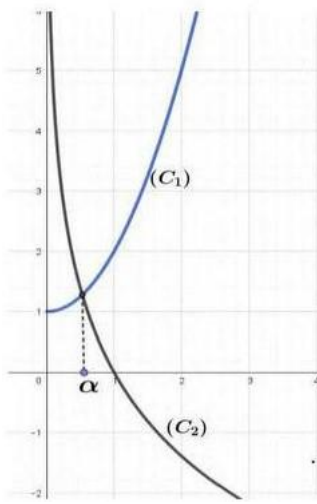
$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

ب) بين أن المتتالية موجبة تماما ومتناقصة.

ج) استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة.

(4) برهن أنه من أن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n$



التمرين الثالث: (09 نقاط)

الجزء الأول: في الشكل المقابل (C_1) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2 + 1$ و (C_2) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto -2\ln x$.

α هي فاصلة نقطة تقاطعهما.

(1) بقراءة بيانية: حدّد وضعية (C_1) بالنسبة إلى (C_2) على المجال $]0; +\infty[$.

(2) $g(x) = x^2 + 1 + 2\ln x$: الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم تحقّق أنّ: $0,5 < \alpha < 0,6$.

الجزء الثاني:

$f(x) = -x + \frac{3 + 2\ln x}{x}$: الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ مع تفسير النتيجة هندسياً.

(2) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

(4) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب لـ (C_f) .

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(5) بين أنّ (C_f) يقبل مماس (T) مواز لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(6) ارسم كلا من (T) و (Δ) ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,7$ و $f(2) = f(0,2) \approx 0$)

(7) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $3 + 2\ln x = mx$.

(8) أحسب القيمة المضبوطة للعدد الحقيقي S حيث: $S = \int_1^e (f(x) + x) dx$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

انتهى الموضوع