

الواجب المنزلي رقم 01 في مادة الرياضيات

يناقش يوم: 2021/10/25

يحاج يوم: 2022/10/23

سلم يوم: 2022/10/18

التمرين الأول:

(I) لتكن الدالة f المعرفة على مجموعة D من $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$

① بين أن $D =]-\infty; -3] \cup]-2; +\infty[$.

② بين أن $f = g \circ h$ حيث g هي الدالة جذر تربيعي، و h دالة يطلب تعيينها ثم تعيين مجموعة تعريفها D_h .

③ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2\}$ فإن $h(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.

④ فكك الدالة h إلى دالتين بسيطتين يطلب تعيينهما. ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة h على المجالين $] - \infty; -2[$ و $] -2; +\infty[$.

⑤ ليكن (C_h) التمثيل البياني للدالة h في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

إشرح كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقاً من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها، ثم أنشئه.

⑥ بين أن النقطة $\Omega(-2; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_h) بطريقتين مختلفتين.

⑦ عين إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $] - \infty; -3[$ و $] -2; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالتين h_1 و h_2 حيث $h_1 = -|h(x)|$ و $h_2(x) = h(-|x|)$.

① إشرح كيفية إنشاء (C_{h_1}) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

② عين D_{h_2} ، ثم أثبت أن الدالة h_2 دالة زوجية.

③ أكتب $h_2(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة، ثم استنتج كيفية إنشاء (C_{h_2}) منحنى الدالة h_2 إنطلاقاً من (C_h) ، وأنشئه.

التمرين الثاني:

(I) نعتبر الدالتين h و k المعرفتين على المجال $[-1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -1 + \sqrt{x+1} \quad \text{و} \quad k(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}}$$

• بين أن: $h = k$.

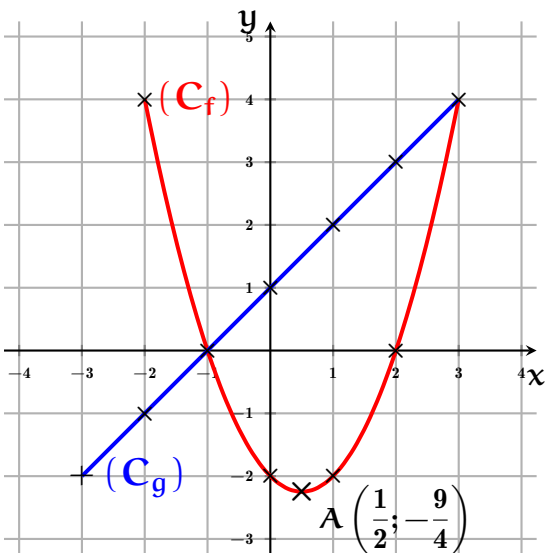
(II) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g كما هو موضح في البيان المقابل. بقراءة بيانية:

① عين كل من D_f و D_g ثم جد $D_{f \circ g}$.

② عين كل من $f(1)$ ، $f(0)$ ، $g(-2)$ ، $g(0)$ ، $g(1)$ ، $(f+g)(1)$ ، $(f \circ g)(0)$ ، $(g \circ f)(0)$ ، $(4f - 3g)(0)$.

③ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(f \circ g)(x) = 0$.

④ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $(f \circ g)(x) < 0$.



الإجابة النموذجية للواجب المنزلي رقم 01 في مادة الرياضيات مع سلم التنقيط

التمرين الأول :

1 تبيان أن $D =]-\infty; -3] \cup]-2; +\infty[$:

$D = \left\{ x / \frac{x+3}{x+2} \geq 0 \text{ و } x \neq -2 \right\}$ إذن نقوم بدراسة إشارة $\frac{x+3}{x+2}$
نقوم بحل المعادلة $\frac{x+3}{x+2} = 0$ تكافئ $x+3=0$ و $x+2 \neq 0$ أي $x = -3$ و $x \neq -2$

و عليه

$$D =]-\infty; -3] \cup]-2; +\infty[$$

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x+2$	-	-	0	+
$\frac{x+3}{x+2}$	+	0	-	+

2 تبيان أن $f = g \circ h$ حيث g هي الدالة جذر تربيعي و h دالة يطلب تعيينها :

إذن f مركب دالتين حيث $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = \frac{x+3}{x+2}$
• ولدينا:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$x \xrightarrow{h} \frac{x+3}{x+2} \xrightarrow{g} \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$$

$f = g \circ h$

3 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من أجل كل D_h فإن $h(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$

طريقة 02 : أجل كل عدد حقيقي x من أجل كل D_h فإن :

$$1 + \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+3}{x+2} = h(x)$$

طريقة 01 :

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+2 \\ -x-2 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

إذن من أجل كل $x \in D_h$ فإن : $h(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$

4 تفكيك الدالة h إلى مركب دالتين بسيطتين:

حسب مخطط التركيب نجد :

$$x \xrightarrow{u} x+2 \xrightarrow{v} 1 + \frac{1}{x+2}$$

$h = v \circ u$

إذن h مركب دالتين حيث $u(x) = x+2$ و $v(x) = 1 + \frac{1}{x}$

5 كيفية إنشاء المنحنى (C_h) :

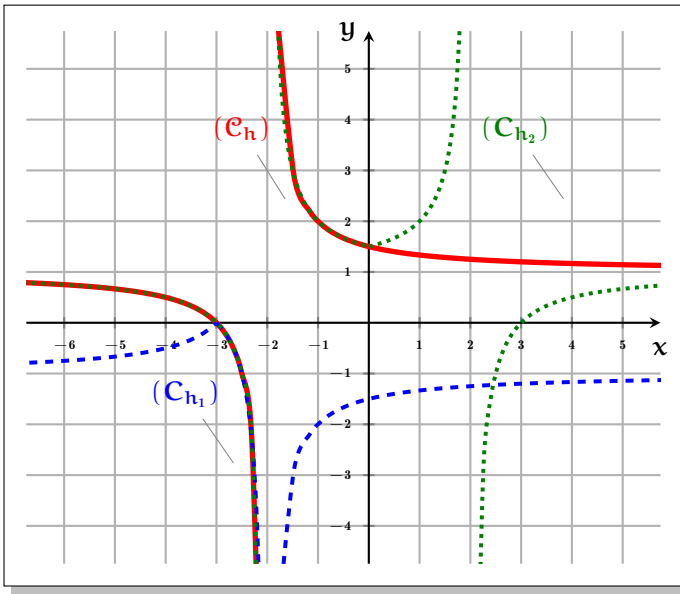
• استنتاج اتجاه تغير الدالة h على المجالين:

$$]-\infty; -2[$$

على هذا المجال الدالة u متزايدة تماماً، ولدينا: $u(]-\infty; -2[) =]-\infty; 0[$
وعلى المجال $]0; +\infty[$ الدالة v متناقصة تماماً.
إذن الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

$$]-2; +\infty[$$

على هذا المجال الدالة u متزايدة تماماً، ولدينا: $u(]-2; +\infty[) =]0; +\infty[$
وعلى المجال $]0; +\infty[$ الدالة v متناقصة تماماً.
إذن الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.



(C_h) صورة منحنى الدالة مقلوب
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه
 $\vec{u} = -2\vec{i} + 1\vec{j}$

6 إثبات أن النقطة $\Omega(-2; 1)$ مركز تناظر المنحنى (C_h):

طريقة 1 لتكن M(x, y) نقطة من (C_h) ، حيث $y = 1 + \frac{1}{x+2}$ هي معادلة (C_h) بالنسبة للمعلم (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
 و لتكن (X, Y) إحداثياتها بالنسبة للمعلم (Ω; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

باستخدام دساتير تغيير المعلم يكون لدينا: $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 1 \end{cases}$ بتعويض قيمة x و y في معادلة منحنى الدالة h نجد

$$Y + 1 = 1 + \frac{1}{X - 2 + 2} \quad \text{اي} \quad Y = \frac{1}{X} \quad \text{و هي معادلة منحنى الدالة h في المعلم } (\Omega; \vec{i}; \vec{j})$$

لتكن الدالة H حيث $H(X) = \frac{1}{X}$

نعلم أن الدالة H فردية (الدالة مقلوب)

و عليه النقطة $\Omega(-2; 1)$ مركز تناظر (C_h).

طريقة 2 نثبت أنه من أجل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن $h(2\alpha - x) + h(x) = 2\beta$ حيث $\Omega(-2; 1)$

إثبات ان $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ معناه $x \neq -2$ أي $-x \neq 2$ أي $-4 - x \neq -2$ و منه $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ و لدينا

$$\begin{aligned} h(-4 - x) + h(x) &= 1 + \frac{1}{-4 - x + 2} + 1 + \frac{1}{x + 2} \\ &= 1 + \frac{1}{-x - 2} + 1 + \frac{1}{x + 2} \\ &= 1 + \frac{1}{-(x + 2)} + 1 + \frac{1}{x + 2} \\ &= 1 - \frac{1}{x + 2} + 1 + \frac{1}{x + 2} \\ &= 2 = 2(1) \end{aligned}$$

إذن النقطة $\Omega(-2; 1)$ مركز تناظر (C_h).

7 تعيين اتجاه تغيير الدالة f:

على المجال $] - \infty; -3]$

الدالة h متناقصة تماما على المجال $] - \infty; -2]$ فهي متناقصة تماما على المجال $] - \infty; -3]$ حيث من أجل كل $x \in] - \infty; -3]$ فإن $h(x) \in [0; 1[$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; 1[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $] - \infty; -3]$

على المجال $] - 2; +\infty[$

الدالة h متناقصة تماما على المجال $] - 2; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in] - 2; +\infty[$ فإن $h(x) > 1$ أي $h(x) \in]1; +\infty[$ والدالة g متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $] - 2; +\infty[$

(II) نعتبر الدالتين h_1 و h_2 حيث $h_1(x) = -|h(x)|$ و $h_2(x) = h(-|x|)$

1 كيفية إنشاء (C_{h_1}) :

$$h_1(x) = \begin{cases} -h(x) & ; x \in] - \infty; -3] \cup] - 2; +\infty[\\ h(x) & ; x \in [-3; -2[\end{cases} \quad \text{أي} \quad h_1(x) = \begin{cases} -h(x) & ; h(x) \geq 0 \\ -(-h(x)) & ; h(x) \leq 0 \end{cases}$$

من أجل $x \in [-3; -2[$: (C_{h_1}) ينطبق على (C_h)

من أجل $x \in] - \infty; -3] \cup] - 2; +\infty[$: نظير (C_{h_1}) بالنسبة لحامل محور الفواصل.

2 تعيين D_{h_2} :

$$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} / -|x| + 2 \neq 0\}$$

$$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq 2\}$$

$$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \text{ و } x \neq -2\}$$

$$D_{h_2} = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

● إثبات أن الدالة h_2 دالة زوجية:

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ معناه $x \neq 2$ و $x \neq -2$ و عليه $-x \neq 2$ و $-x \neq -2$ و منه $-x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ولدينا $h_2(-x) = h(-|-x|) = h(-|x|) = h_2(x)$ و منه g دالة زوجية

3 كتابة $h_2(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

$$h_2(x) = h(-|x|) \begin{cases} h(-x) & ; x \geq 0 \text{ و } x \neq 2 \\ h(x) & ; x \leq 0 \text{ و } x \neq -2 \end{cases}$$

● كيفية إنشاء (C_{h_2}) :

من أجل $x \in] - \infty; -2[\cup] - 2; 0[$ فإن (C_{h_2}) ينطبق على (C_h)

من أجل $x \in [0; 2[\cup]2; +\infty[$ فإن (C_{h_2}) نظير (C_h) بالنسبة لحامل محور الترتيب (لأنها دالة زوجية).

التمرين الثاني :

(I) تبين أن $h = k$:

لدينا: الدالتان h و k معرفتان على نفس المجال: $[-1; +\infty[$ ، ولدينا من أجل كل x من $[-1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} h(x) &= -1 + \sqrt{x+1} \\ &= \frac{(-1 + \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{1 + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{1 + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+1) - 1}{1 + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} \\ &= k(x) \end{aligned}$$

إذن: $h = k$

1 تعيين D_f و D_g : من التمثيل البياني نجد: $D_g = [-3; 3]$ و $D_f = [-2; 3]$
 • تعيين $D_{g \circ f}$:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x / x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\} \\ D_{f \circ g} &= \{x / x \in [-3; 3] \text{ و } g(x) \in [-2; 3]\} \\ D_{f \circ g} &= \{x / x \in [-3; 3] \text{ و } x \in [-3; 2]\} \\ D_{f \circ g} &= [-3; 2] \end{aligned}$$

2 تعيين الصور:

$$\begin{aligned} g(1) = 2, \quad g(0) = 1, \quad g(-2) = -1, \quad f(1) = -2, \quad f(0) = -2 \\ (4f - 3g)(0) = 4f(0) - 3g(0) = 4 \times (-2) - 3 \times 1 = -11, \quad (f + g)(1) = f(1) + g(1) = -2 + 2 = 0 \\ (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = -2, \quad (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-2) = -1 \end{aligned}$$

3 حل المعادلة بيانيا

$$\begin{aligned} f(g(x)) = 0 \text{ أي } (f \circ g)(x) = 0 \\ \text{بوضع } X = g(x) \text{ المعادلة تصبح } f(X) = 0 \text{ ومنه للمعادلة حلين هما } X = -1 \text{ أو } X = 2 \\ \text{لما } X = -1 \text{ نجد } g(x) = -1 \text{ ومنه } S_1 = \{-2\} \\ \text{لما } X = 2 \text{ نجد } g(x) = 2 \text{ ومنه } S_2 = \{1\} \\ \text{و عليه حلول المعادلة هي } S = \{-2; 1\} \end{aligned}$$

4 حل المتراجحة بيانيا

$$\begin{aligned} f(g(x)) < 0 \text{ أي } (f \circ g)(x) < 0 \\ \text{بوضع } g(x) = X \text{ المتراجحة تصبح } f(X) < 0 \text{ حيث من البيان نجد } X \in]-1; 2[\\ \text{و منه } g(x) \in]-1; 2[\text{ ومنه } x \in]-2; 1[\\ \text{و عليه حلول المتراجحة هي } S =]-2; 1[\end{aligned}$$