

التمرين الأول (05 نقاط)

نعتبر كثيري الحدود P و Q المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $Q(x) = 3x^2 - 4x + 1$ و $P\left(\frac{x}{3}\right) = Q(x)$

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$ [00.50 ن]

2 احسب $P(0)$ و $P(1)$ [01.50 ن]

3 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $P(x) = 27x^2 - 12x + 1$ [01.50 ن]

4 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x) = 3Q(x)$ ، ثم عيّن إشارة $\frac{P(x)}{3Q(x)}$ [01.50 ن]

التمرين الثاني (09 نقاط)

I الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ، وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 أ- ادرس تغيرات الدالة g [01.00 ن]

ب- ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_g) [00.50 ن]

2 أ- احسب $g(-2)$ ، ثم حل المعادلة $g(x) = 0$ [01.50 ن]

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ [01.00 ن]

II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

1 أ- بين أنه من أجل كل x حقيقي يختلف عن -1 لدينا، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$ [01.00 ن]

ب- استنتج تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها [01.00 ن]

2 أ- a, b, c ثلاث أعداد حقيقية، بين أن: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$ [01.00 ن]

ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 3$ [00.50 ن]

ج- أثبت أنه لا توجد أي مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) [00.50 ن]

III نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$

1 تحقق أنه من أجل كل x حقيقي غير معدوم: $h(x) + 1 = f(x - 1)$ [00.50 ن]

2 اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h انطلاقاً من (C_f) [00.50 ن]

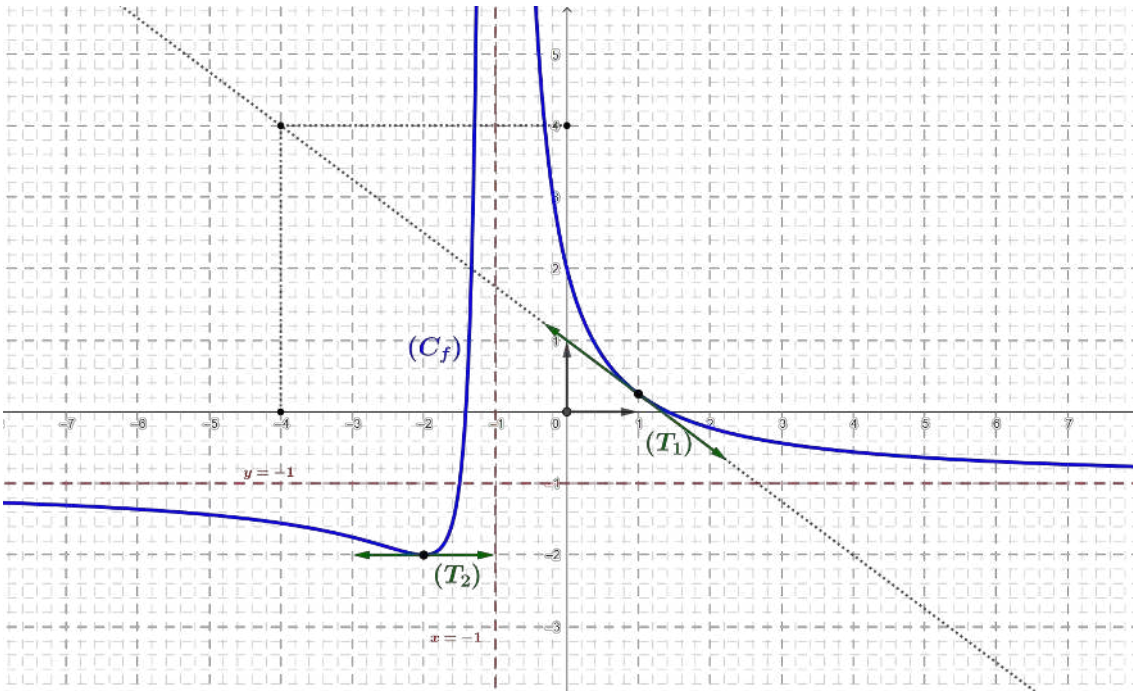
التمرين الثالث (06 نقاط)

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)^2}$ ، حيث a, b, c أعداد حقيقية. و (C_f) التمثيل

البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(T_1) و (T_2) مماسين للمنحنى (C_f) في النقطتين $A\left(1; \frac{1}{4}\right)$ و $B(-2; -2)$.

كما هو مبين في الشكل الآتي:



بقراءة بيانية، أجب على ما يلي:

- ① عيّن حلول المعادلة $f'(x) = 0$
- ② شكّل جدول إشارة الدالة المشتقة f' ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f
- ③ عيّن: $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \right)$ و $f'(-2)$ ، $f(-2)$ ، $f(0)$
- ④ m وسيط حقيقي، ناقش بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$
- ⑤ مما سبق، عيّن عبارة (T_1) ، (T_2) و $f(x)$

[00.50 ن]

[00.75 ن]

[01.75 ن]

[01.00 ن]

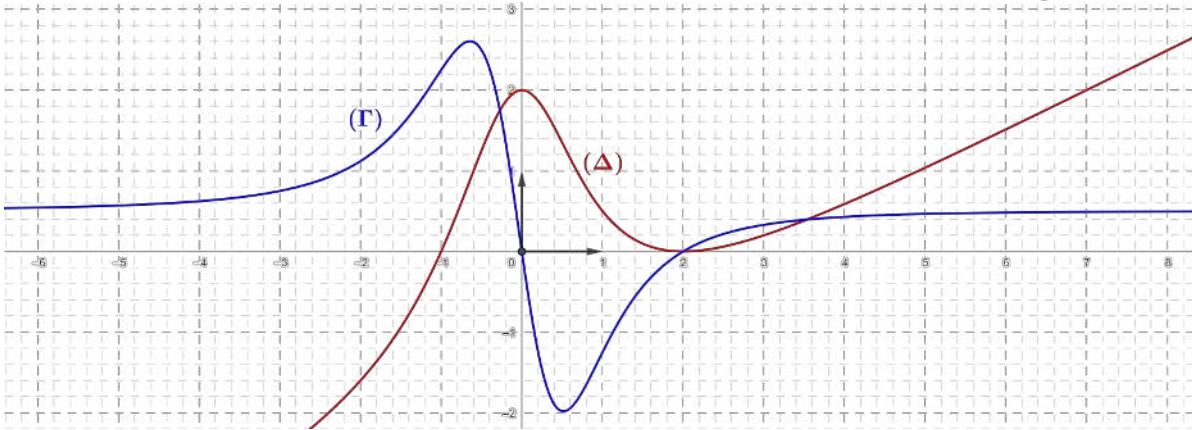
[02.00 ن]

← تمرين إضافي: (01 نقطة)

إليك التمثيلان البيانيان (Γ) و (Δ) أحدهما خاص بالدالة f والآخر لمشتقتها f'

- أنسب (مع التبرير) كل تمثيل لدالته

[01.00 ن]



حكمة: مهما كان العلم متعباً، فلن يكون أشد إرهاقاً من الجهل



التمرين (١):

(١) حل $Q(x) = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(1) \\ = 16 - 12 = 4 > 0$$

اذن يوجد جذران لـ $Q(x)$:

$$x = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2(3)} = -\frac{1}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2(3)} = 1$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\} \quad \text{اذن}$$

$$P(0) = P\left(\frac{0}{3}\right) = Q(0) = 1$$

$$P(1) = P\left(\frac{3}{3}\right) = Q(3) = 16$$

$$P\left(\frac{x}{3}\right) = Q(x) \quad \text{لدينا}$$

$$x = 3t \quad \text{نضع} \quad \frac{x}{3} = t \quad \text{ومنه:}$$

$$p(t) = Q(3t)$$

: إذن

$$p(t) = 3(3t)^2 - 4(3t) + 1$$

$$= 3(9t^2) - 12t + 1$$

$$p(t) = 27t^2 - 12t + 1$$

وكتابة

$$p(x) = 27x^2 - 12x + 1$$

$$p(x) = 3Q(x)$$

: لدينا

(4)

$$27x^2 - 12x + 1 = 3(3x^2 - 4x + 1) \text{ : إذن}$$

$$27x^2 - 12x + 1 = 9x^2 - 12x + 3$$

$$18x^2 = 2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$|x| = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ و } x = \frac{1}{3} \text{ : إذن}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$x =$$

نشارة
 $\frac{p(x)}{3Q(x)}$

لدينا: $\frac{p(x)}{3Q(x)} = Q(x)$

تكافئ: $\begin{cases} 3x = 1 \\ 3x = \frac{1}{3} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$

اذن $\sum_{p(x)=0} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9} \right\}$
 وعليه: (370)

x	$-\infty$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$p(x)$	+	0	-	0	+
$-Q(x)$	+	+	+	-	+
$\frac{p(x)}{3Q(x)}$	+	0	-	-	+

الترتيب 2:

ك/ 1 - تغيرات:

لدينا g قابضة لاشتقاقها:

$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

$$\Delta = 6^2 - 4(3)(3) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$x = \frac{-6}{2(3)} = -1 \quad \text{ومنه } g'(x) = 0 \quad \text{معناه}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+

اذن الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$.

ب/ الاستنتاج:

لدينا: $g'(x)$ تتغير عند $x = -1$ ولا

تغير انشائها، ومعه $g(x)$ يقبل

نقطة انعطاف عند الفاصلة -1.

(2) - حساب $g(-2)$:

$$g(-2) = -8 + 12 - 6 + 2 = 0$$

= حل المعادلة $g(x) = 0$.

لدينا: $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

	1	3	3	2
-2	0	-2	-2	2
	1	1	1	0

$$g(x) = (x+2)(x^2 + x + 1)$$

اذن

$$g(x) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{cases} x+2=0 \\ \text{أو} \end{cases} \quad \text{معناه}$$

$$x^2+x+1=0 \dots (Q(x))$$

$$x = -2 \quad \text{لدينا:} \quad x+2=0 \quad \text{معناه}$$

ولدينا: $Q(x)=0$ لا تقبل حلاً في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta < 0$

$$S_{g(x)=0} = \{-2\}$$

بما أن g متزايدة على $\mathbb{R}$ و $g(-2)=0$ فإن

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) لدينا f و g لا تتقاطع على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1) \left[(6x^2+14x+8)(x+1) - 2(2x^3+7x^2+8x+2) \right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{6x^3+14x^2+8x+6x^2+14x+8-4x^3-14x^2-16x-4}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3} \quad \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

ب) تغيرات f :

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(n+1)^3}$$

لدينا:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1)$$

لدينا:

$n+1 \neq 0$ يعني $n \neq -1$
وعليه:

n	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$(n+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

وعليه f : متزايدة مؤقتاً على $[-2, -1]$

والتناقص مؤقتاً على $[-1, +\infty]$

ج) جدول تغيرات f :

n	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$				

⑩، ایجاد a، b، c:

منا آ جس کل x حقیقی یضانی:

عن $x^2 - 1$ ، لریب:

$$ax+b+\frac{c}{(x+1)^2} = \frac{(ax+b)(x+1)^2 + c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{ax^3+x^2(2a+b)+x(a+2b)+(b+c)}{(x+1)^2}$$

با مقایسه "مع میا"، $f(x)$:

$$\begin{cases} a=2 \end{cases}$$

2- نجد:

$$2a+b=7$$

$$a+2b=8$$

$$b+c=2$$

ومنه : $a = 2$ و $b = 3$ و $c = -1$

اذن : $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$

ب/ الوضع النسبي :

حنا آمل كل $x \neq -1$ لدينا :

$$f(x) - (2x + 3) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

وعليه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
شكل $f(x)$			
الدرجة النسبي	$(\cup)$		$(\cup)$

تفترض وجود محاسن (f) يوازير (D)

وننزل إلى تناقص

$$f'(x) = 2$$

لدينا :

$$\frac{2f(x)}{(x+1)^3} = 2$$

آيا :

$$\frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^3} = 2 \quad \text{ومنہ:}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+1)^3 \quad \text{ومنہ:}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad \text{ومنہ}$$

$$2 = 1 \quad \text{ومنہ:}$$

وہذا متحیل

انہ لا یوجد ای خاصی ر (۴) یو ازی (۵)

$$\text{نثبت ان } f(n-1) = h(x) + 1 \quad \text{①}$$

کے من اجل کہ $x = 0$ لینا

$$f(n-1) = \frac{2(n-1)^3 + 7(n-1)^2 + 8(n-1) + 2}{(n-1+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 7(x^2 - 2x + 1) + 8x - 8 + 2}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 + 7x^2 - 14x + 7 + 8x - 6}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = h(x) + 1$$

$$f(n-1) = h(x) + 1 \quad \text{انہ}$$

$$h(x) + 1 = f(n-1) \quad \text{لدينا:}$$

$$h(x) = f(n-1) - 1 \quad \text{ومن هنا:}$$

ومن هنا (C_n) فوولير، (C_f) با لا تنطبق

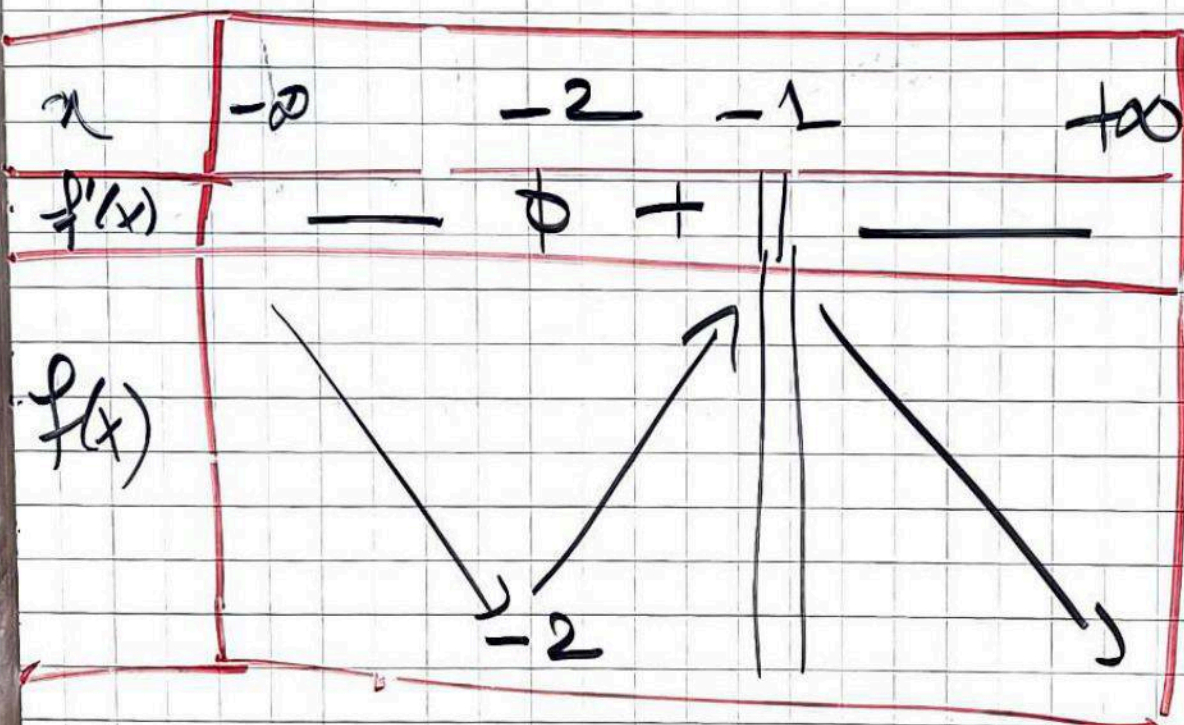
الذي شاع في $\mu(\hat{\cdot})$

القرين 3:

$$\sum_{f'(x)=0} = \{-2\}$$

① (D)

② f



$$f(0) = 2$$

$$f(-2) = -2$$

③

$$\bullet f'(-2) = 0$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \right) = f'(1)$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{4}}{-4 - 1} = \frac{\frac{15}{4}}{-5} = -\frac{3}{5}$$

حلل المعادلة $f(x) = m$

(4)

هي خواص لنقطة تقاطع (مع)
مع المستقيمة ذات المعادلة

$$y = m$$

• ملاحظة: $m < -2$ لا يوجد حلول

• ملاحظة: $m = -2$ للمعادلة حل واحد سالب تمامًا

• ملاحظة: $-2 < m < 1$ للمعادلة حلان سالبان تمامًا

• ملاحظة: $m = -1$ حل واحد سالب تمامًا

← التمرين الثالث ٥٥ نقاط

① تعيين حلول المعادلة $f'(x) = 0$

$$S_{f'(x)=0} = \{-2\}$$

② تشكيل جدول إشارة الدالة المشتقة f' واستنتاج جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	-1	$-\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	↘ ↗ -2			↘

③ تعيين $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \right)$ و $f'(-2)$ ، $f(-2)$ ، $f(0)$

$$\bullet f'(-2) = 0$$

$$\bullet f(-2) = -2$$

$$\bullet f(0) = 2 \text{ لدينا:}$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \right) = f'(1) = \frac{4 - \frac{1}{4}}{-4 - 1} = -\frac{3}{4}$$

④ المناقشة البيانية حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$:

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمت ذات المعادلة $y = m$:

- لـ $m < -2$ المعادلة لا تقبل حولا
- لـ $m = -2$ المعادلة حل مضاعف سالب تماما
- لـ $-2 < m < -1$ المعادلة حلان سالبان تماما
- لـ $m = -1$ المعادلة حل سالب تماما
- لـ $-1 < m < 2$ المعادلة حلان مختلفان في الإشارة
- لـ $m = 2$ المعادلة حل معدوم وحل سالب تماما
- لـ $m > 2$ المعادلة حلان سالبان تماما

⑤ تعيين عبارة (T_1) ، (T_2) و $f(x)$:

$$\begin{aligned} \bullet (T_1): y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= -\frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{3}{4}x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (T_2): y &= f'(-2)(x+2) + f(-2) \\ &= 0(x+2) - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

- تعيين عبارة $f(x)$

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x+1)^2 - 2(x+1)(ax^2+bx+c)}{(x+1)^4} \text{ و } f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)^2} \text{ لدينا:}$$

$$\text{لدينا: } f(0) = 2 \text{ ومنه: } \boxed{c = 2}$$

$$\text{لدينا: } f(-2) = -2 \text{ ومنه: } 4a - 4b + c = -2 \text{ أي: } 4a - 4b + 2 = -2 \text{ أي: } (*) \quad 4a - 4b = -4$$

$$\text{لدينا: } f'(-2) = 0 \text{ ومنه: } (-4a + b) + 2(4a - 4b + c) = 0 \text{ ومنه: } 4a - 9b = -4 \text{ ومنه: } (**) \quad -4a + 9b = 4$$

$$\text{بجمع } (*) \text{ و } (**): 5b = 0 \text{ ومنه: } \boxed{b = 0}$$

$$\text{نعوض قيمة } b \text{ في } (*): \text{ نجد: } \boxed{a = -1}$$

$$\text{إذن: } f(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x+1)^2}$$