

◆ التمرين 01: [03 نقاط]

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x - m + 1 \\ g(x) = mx + 1 \end{cases}$$

• جد جميع القيم الممكنة للعدد الحقيقي m والتي تحقق: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ [03 ن]

◆ التمرين 02: [07 نقاط]

P كثير حدود حيث: $P(x) = -x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 6$

1 احسب $P(2)$ و $P(-1)$ ، ثم حل $P(x)$. [03 ن]

2 ادرس إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج على $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$ [02 ن]

3 حل في $\mathbb{R}_+$ المتراجحة: $x^2 - x\sqrt{x} - 5x + 3\sqrt{x} + 6 \geq 0$ [01 ن]

4 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $|x - 1|^3 + 5(x - 1)^2 = (x - 1)^4 + 3|x - 1| + 6$ [01 ن]

◆ التمرين 03: [10 نقاط]

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{(x + 1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

(T_1) و (T_2) مماسين للمنحنى (C_f) في النقطتين O و ω ذات الفاصلتين 0 و $\frac{1}{2}$ على الترتيب

كما هو مبين في الشكل المقابل:

(I) بقراءة بيانية، أجب على ما يلي:

1 عيّن حلول المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-1; +\infty[$ [0.5 ن]

2 شكّل جدول إشارة الدالة f [0.5 ن]

3 شكّل جدول إشارة الدالة المشتقة f' [01 ن]

4 شكّل جدول تغيرات الدالة f [01 ن]

5 عيّن: $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f'(2)$ ، $f(2)$ [02 ن]

6 استنتج الأعداد الحقيقية a ، b و c [1.5 ن]

$$\text{(II) نضع: } f(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

1 بيّن أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ لدينا: [01 ن]

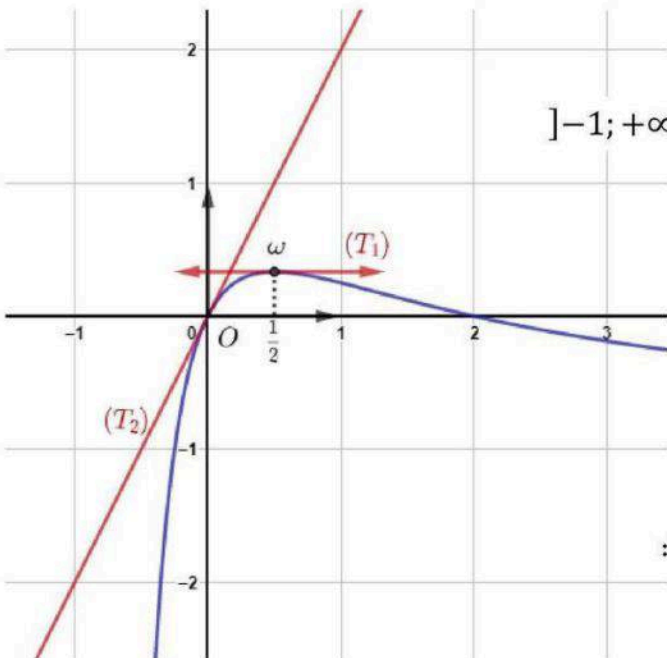
$$f'(x) = \frac{2(1 - 2x)}{(x + 1)^3}$$

2 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها [01 ن]

(III) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ $g(x) = [f(x)]^2$

1 احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ [0.5 ن]

2 استنتج إشارة $g'(x)$ ثم شكّل جدول تغيراتها [01 ن]



◆ تصحيح التمرين 01: [03 نقاط]

• إيجاد جميع القيم الممكنة للعدد الحقيقي m والتي تحقق:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

لدينا:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

$$\Rightarrow mx + 1 - m + 1 = m(x - m + 1) + 1$$

$$\Rightarrow mx - m + 2 = mx - m^2 + m + 1$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m = 1$$

ومنه: القيم الممكنة للعدد الحقيقي m التي تحقق:

$$s = \{1\} \text{ هي: } (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

◆ تصحيح التمرين 02: [07 نقاط]

① حساب $P(-1)$ و $P(2)$

$$P(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 5(-1)^2 - 3(-1) - 6 = 0$$

$$P(2) = -(2)^4 + (2)^3 + 5(2)^2 - 3(2) - 6 = 0$$

- تحليل $P(x)$

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$= (x^2 - x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$= ax^4 + (b - a)x^3 + (c - 2a - b)x^2 + (-c - 2b)x - 2c$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \text{ بعد المطابقة والتبسيط نجد:}$$

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(-x^2 + 3)$$

$$\text{نحل المعادلة } -x^2 + 3 = 0$$

$$\text{لدينا: } -x^2 = -3$$

$$\text{معناه: } x = -\sqrt{3} \text{ أو } x = \sqrt{3}$$

$$\text{إذن: } P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

② دراسة إشارة $P(x)$

$$\begin{cases} -x^2 + 3 = 0 \dots (*) \\ (x - 2)(x + 1) \dots (**) \end{cases} \text{ نضع:}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$*$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$**$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

- استنتج حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$ من جدول الإشارة نجد حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$ هي:

$$s = [-\sqrt{3}; -1] \cup [\sqrt{3}; 2]$$

③ حل في $\mathbb{R}_+$ المتراجحة:

$$x^2 - x\sqrt{x} - 5x + 3\sqrt{x} + 6 \geq 0$$

$$\text{المعادلة: } x^2 - x\sqrt{x} - 5x + 3\sqrt{x} + 6 \geq 0$$

$$\text{تكافئ: } -x^2 + x\sqrt{x} + 5x - 3\sqrt{x} - 6 \leq 0$$

$$\text{نضع: } \sqrt{x} = t \quad \text{أي: } x = t^2$$

$$\text{نجد: } -(t^2)^2 + t^2t + 5t^2 - 3t - 6 \leq 0$$

$$\text{أي: } -t^4 + t^3 + 5t^2 - 3t - 6 \leq 0$$

$$\text{أي: } P(t) \leq 0$$

$$\text{ومنه: } t \in]0; \sqrt{3}] \cup [2; +\infty[$$

$$\text{إذن: } x \in]0; 3] \cup [4; +\infty[$$

④ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$\text{نضع: } t = x - 1 \quad \text{أي: } x = t + 1$$

$$\text{نجد: } |t|^3 + 5t^2 = t^4 + 3|t| + 6$$

$$\text{المعادلة: } |t|^3 + 5t^2 = t^4 + 3|t| + 6$$

$$\begin{cases} t^3 + 5t^2 = t^4 + 3t + 6 ; t \geq 0 \\ -t^3 + 5t^2 = t^4 - 3t + 6 ; t \leq 0 \end{cases} \text{ تكافئ:}$$

$$\begin{cases} -t^4 + t^3 + 5t^2 - 3t - 6 = 0 ; t \geq 0 \\ -t^4 - t^3 + 5t^2 + 3t - 6 = 0 ; t \leq 0 \end{cases} \text{ أي:}$$

أي:

$$\begin{cases} -t^4 + t^3 + 5t^2 - 3t - 6 = 0 ; t \geq 0 \\ -(-t)^4 + (-t)^3 + 5(-t)^2 - 3(-t) - 6 = 0 ; t \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(t) = 0 ; t \geq 0 \\ P(-t) = 0 ; t \leq 0 \end{cases} \text{ أي:}$$

$$\text{إذن: } t \in [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$$

$$\text{وعليه: } x \in [-1; -\sqrt{3} + 1] \cup [\sqrt{3} + 1; 3]$$

◆ تصحيح التمرين 03: [10 نقاط]

(ا)

① تعيين حلول المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-1; +\infty[$:

$$s = \{0; 2\}$$

② تشكيل جدول إشارة الدالة f :

x	-1	0	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

③ تشكيل جدول إشارة الدالة المشتقة f' :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

④ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$f(\frac{1}{2})$	

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - 2x)$

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

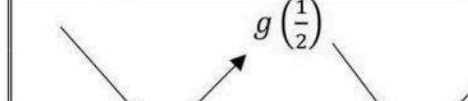
x	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f\left(\frac{1}{2}\right)$	

(III)

1 حساب $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$:

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)$$

2 استنتاج إشارة $g'(x)$ وتشكيل جدول تغيراتها:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$f(x)$	-	0	+	+	0	-	
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

5 تعيين: $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, $f(0)$:

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f'(0) = \frac{2 - (-2)}{1 - (-1)} = 2$$

6 استنتاج الأعداد الحقيقية a , b و c :

لدينا:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{a(0)^2 + b(0) + c}{(0 + 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0}$$

ولدينا:

$$f(2) = 0 \Rightarrow \frac{a(2)^2 + 2b + c}{(2 + 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2b = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}b \dots (*)$$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(ax^2 + bx)}{(x + 1)^4}$$

ومنه:

$$f'(0) = 2 \Rightarrow \frac{(b)(1)^2}{(1)^4} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2}$$

نعوض قيمة b في (*): نجد: $\boxed{a = -1}$

إذن:

$$\boxed{f(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x + 1)^2}}$$

(II)

1 تبين أنه: $f'(x) = \frac{2(1-2x)}{(x+1)^3}$

$$f'(x) = \frac{(-2x + 2)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(-x^2 + 2x)}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{(-2x + 2)(x + 1) - 2(-x^2 + 2x)}{(x + 1)^3}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x - 2x + 2 + 2x^2 - 4x}{(x + 1)^3}$$

$$= \frac{2 - 4x}{(x + 1)^3}$$

$$= \frac{2(1 - 2x)}{(x + 1)^3}$$

2 دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا: $x \in]-1; +\infty[$ لما $(x + 1)^3 > 0$