

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{eu_n}{u_n + 1}$

1. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq e$

ب. ادرس اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتج تقاربها.

2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{e(1-e)u_n}{u_n - e + 1}$

أ. بين أن (v_n) تتاليه هندسية أساسها e يطلب حساب حدها الأول.

ب. أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim u_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

4. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} - e + 1 \leq e^{-1}(u_n - e + 1)$

ب. استنتج أن: $0 < u_n - e + 1 \leq e^{-n}$

ت. استنتج $\lim u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات مع التبرير:

x_i	-2	β	2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	α	$\frac{7}{15}$

1. قانون الإحتمال للمتغير العشوائي معرف بالجدول المقابل:

قيمة العددين الحقيقيين α و β حتى يكون $E(193X + 1444) = 2023$ هي:

(ج) $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = 0$

(ب) $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = 4$

(أ) $\alpha = \frac{3}{27}$; $\beta = 1$

2. المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $u_n = e^n - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

نصع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

(ج) $S_n = \frac{e^{n+1} - e}{-1} + \ln(n+1)$

(ب) $S_n = ne^n - \ln(n) + \ln(n+1)$

(أ) $S_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} + \ln(n+1)$

3. نعتبر العدد الحقيقي $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^{2022}}{x} dx$ قيمة I هي:

(ج) $I = \frac{2022}{2023}$

(ب) $I = \frac{1}{2023}$

(أ) $I = 2023$

4. حلول المعادلة التفاضلية $y'' = e^{-x} + \frac{1}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$ هي:

(ج) $f(x) = e^{-x} - \ln x + c_1 x + c_2$

(ب) $f(x) = e^{-x} + \ln x + c_1 x + c_2$

(أ) $f(x) = \ln x - e^{-x} + c_1 x + c_2$

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$: $g(x) = 2x \ln(x+1)$

ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 3cm$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

2. عين مجموعة الدوال F الأصلية للدالة $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$ على المجال $[0; +\infty[$

3. نضع : $I = \int_0^{e-1} \frac{x^2}{x+1} dx$ و $J = \int_0^{e-1} g(x) dx$

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة يبين أن : $J = (e-1)^2 - I$

(ب) أحسب قيمة I و استنتج قيمة J .

4. (أ) تحقق أنه من أجل كل $x \geq 0$: $g(x) \geq 0$

(ب) استنتج مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (Γ) و محور الفواصل و المستقيمين المرفقين بالمعادلتين $x = e-1$ و $x = 0$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (4x+2)e^x - 1$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0,2 < \alpha < -0,19$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (2xe^x - 1)e^x$

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x g(x)$

(ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

(4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $0,34 < \beta < 0,36$

(ب) استنتج أن : $e^\beta = \frac{1}{2\beta}$

(5) أرسم (T) و المنحنى (C_f) .

(6) أ) تحقق أن الدالة $H : x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto 2xe^{2x}$ على $\mathbb{R}$

(ب) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة $S(\beta)$ الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى و محور الفواصل و المستقيمتين المعرفة بالمعادلات

$x = \beta$ و $x = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{4+u_n^2}} : u_0 = 2 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$
 ب. أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{4}{u_n^2}$
 أ. بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .
 ب. أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . واحسب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
3. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1\sqrt{v_1} + 2u_2\sqrt{v_2} + 3u_3\sqrt{v_3} + \dots + nu_n\sqrt{v_n}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التعليل :

- (1) الحد العام للمتتالية العددية (w_n) المرفة بـ : $w_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = -\frac{1}{3}w_n - 4$ هو : $w_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$
- (2) الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (x - \ln(x))e^{-2x}$ تمثيلها البياني يقبل مستقيم مقارب معادلته : $y = 0$
- (3) الدالتان G و H المرفعتان على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = x + \ln(e^{-2x} + 1)$ و $H(x) = -x + \ln(e^{2x} + 1)$ أصليتان لنفس الدالة
- (4) القيمة المتوسطة للدالة $\frac{1 + \ln x^2}{x}$ على المجال $]e^{-1}; e]$ تساوي $\frac{2e}{e^2 - 1}$
- (5) من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + (x-1)^2 e^x$
- ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$
1. نعتبر G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = (\alpha x + \beta)e^x$
 • عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون الدالة G دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$
 2. نضع : $A = \int_0^1 xe^x dx$ و $B = \int_0^1 x^2 e^x dx$
 (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $B = e - 2A$
 ب) أحسب قيمة A ، ثم استنتج قيمة B
 3. (أ) بالإستعانة بنتائج السؤال (2. ب) أحسب العدد الحقيقي A حيث $A = \int_0^1 (x-1)^2 e^x dx$
 ب) فسر النتيجة هندسيا .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^3 + 4 \ln x$
1. أدرس تغيرات الدالة g .
 2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,78 < \alpha < 0,79$
 3. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 - 2x + \frac{1 + 2 \ln x}{x^2}$

(C) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ، حيث وحدة الطول $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1. أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، فسر النتيجة هندسيا

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x + 1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

3. أ. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ يكون : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^3}$

ب. استنتج اتجاه تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها .

ج. بين أن : $f(\alpha) = 1 + \frac{1 - 3\alpha^3}{\alpha^2}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

بين أن (C) يقبل مماسا وازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

4. أنشئ (Δ) ، (T) و (C)

5- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m د حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$

6. نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $H(x) = \frac{-1 - \ln x}{x}$

أ) بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة $\frac{\ln(x)}{x^2} : h \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = \sqrt{e^{-1}}$ و $x = 1$.