

على التلميذ أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير.

(1) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $-y' + 2y - 2 = 0$ و الذي يحقق $y(0) = 2024$ هو :

(أ) $f(x) = 2023e^{2x} - 1$ ، (ب) $f(x) = 2023e^{2x} + 1$ ، (ج) $f(x) = -2023e^{2x}$.

(2) مجموعة حلول المتراجحة : $9^x - 4 \cdot 3^x + 4 \leq 0$ في المجموعة $\mathbb{R}$ هو :

(أ) $S = \Phi$ ، (ب) $S = \left] -\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right]$ ، (ج) $S = \left\{ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \right\}$.

(3) حلول المعادلة $6C_n^3 + A_n^2 = 36$ في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي : (أ) $S = \{0; 4\}$ ، (ب) $S = \{4\}$ ، (ج) $S = \Phi$

(4) القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بالعلاقة $f(x) = \frac{2e^{-x}}{2e^{-x} + 1}$ على المجال $[0; \ln 2]$ هي :

(أ) $m = -1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$ ، (ب) $m = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}$ ، (ج) $m = -1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

(5) ليكن Z عدد مركب حيث : $Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون Z^n حقيقي هي :

(أ) $n = 4k$ ، (ب) $n = 4k + 2$ ، (ج) $n = 2k + 4$. حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

الشكل المرفق هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ و المستقيم ذو المعادلة

$y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(ب) بين أنه إذا كان $x \in [0, \sqrt{3}]$ فإن : $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) كمايلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) مثل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 على محور الفواصل مبرزاً خطوط التمثيل.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

(د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{1+u_n^2})}{\sqrt{1+u_n^2}}$

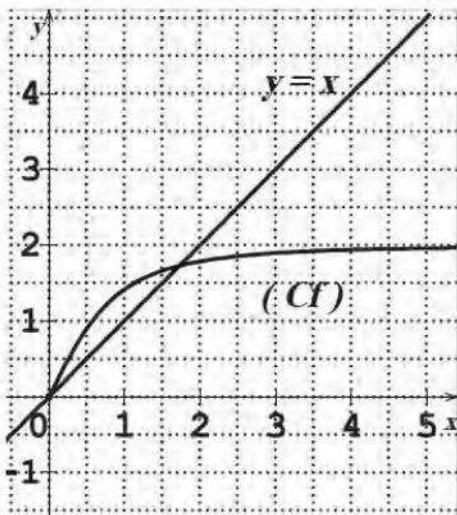
ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج تقاربها .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

(ب) استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{3}{3 - u_0^2} + \frac{3}{3 - u_1^2} + \dots + \frac{3}{3 - u_n^2}$



التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 ، U_2 بهما كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس بحيث :
 U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 1 ، 1 و ثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 .
 U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 1 ، 1 و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 0 ، 1 .
 نختار عشوائيا احد الصندوقين . اذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي دون ارجاع واذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي و بإرجاع.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A "سحب كرتين من نفس اللون" و B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم"

(2) بين أن : $P(A \cap B) = \frac{37}{175}$. هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل .

(3) اذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما هو احتمال ان تكون من الصندوق U_1 ؟

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله . (ب) أحسب $E(-3X+7)$.

التمرين الرابع : (07 نقط)

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = (x \ln x)^2 + \ln x + 1$

• بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,32 < \alpha < 0,33$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1}{x \ln x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 1Cm)

(1) (أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا . أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$: $f'(x) = 1 + \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و للمستقيم (Δ) .

(4) ليكن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \beta$ حيث β عدد حقيقي. عين قيمة β حتى يكون المستقيم (T) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

(5) أرسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) . (علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها λ حيث : $1,53 < \lambda < 1,54$. نأخذ $(f(\alpha) \approx 3)$.

(6) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $X = e^{\frac{1}{Xm}}$ حلين متمايزين.

(7) أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = 3$ ، $x = 4$.

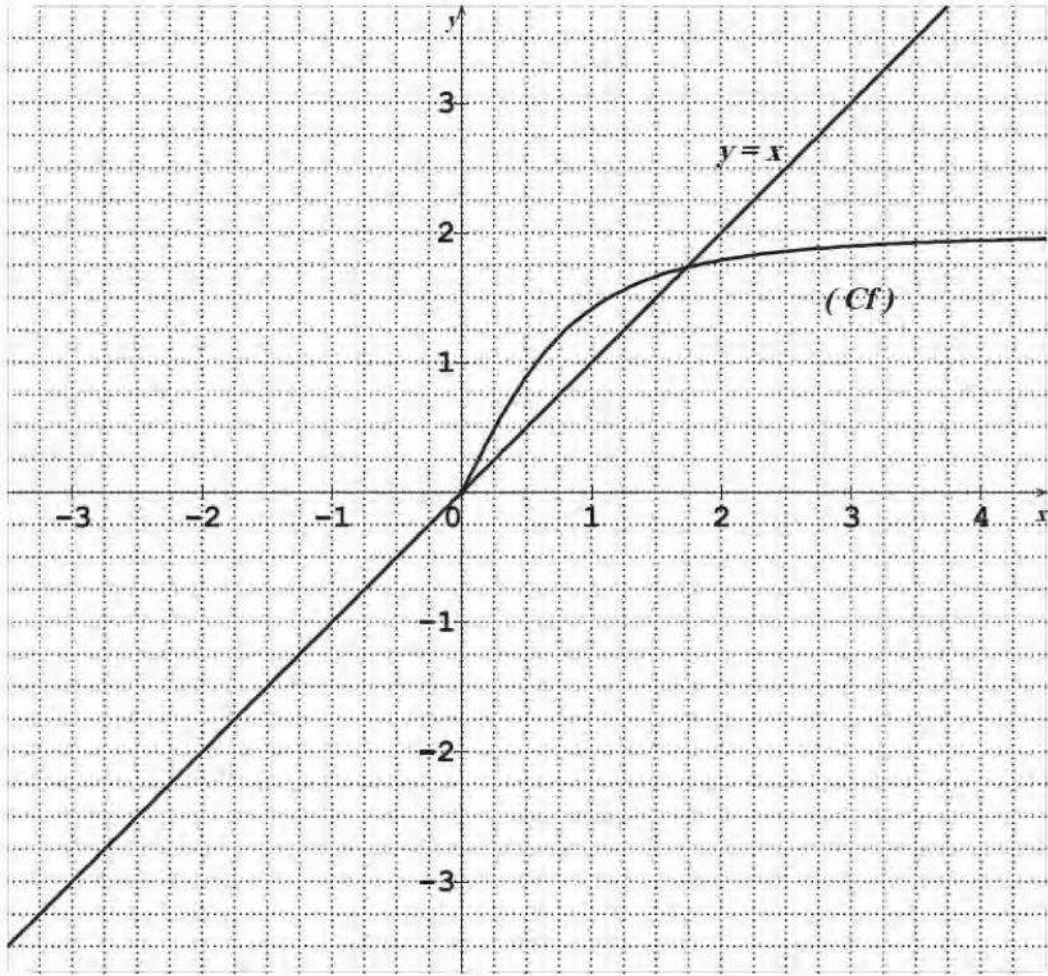
(III) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

(أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ (دون حساب عبارة $h(x)$).

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

الوثيقة المرفقة

..... : الاسم و اللقب



ملاحظة: تعاد الوثيقة المرفقة مع ورقة الإجابة

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

(1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بعدها الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$

أ- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) متتالية ثابتة .

(2) من أجل: $\alpha = 3$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leq 3$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و برّر تقاربها .

(د) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = 2u_n - 4$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \ln 2$ يطلب تعيين حدّها لأول v_0 .

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (\ln 2)^n + 2$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة أخرى .

(4) تحقق أن : $2^n = \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2}$ ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{\ln 4}{u_1 - 2} + \frac{(\ln 4)^2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(\bar{z} - 1 + 3i)(z^2 - 10z + 50) = 0$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C لواحقتها على الترتيب :

$$z_C = 1 + 3i \text{ و } z_B = \bar{z}_A, \quad z_A = 5 + 5i$$

(2) (أ) أكتب كل من z_B و z_A على الشكل الأسّي.

(ب) علّم النقط A, B و C .

(ج) عيّن طولاً وعمدة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

(د) استنتج طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

(3) (أ) أكتب على الشكل الجبري العدد a حيث : $a = \left(\frac{z_B}{5\sqrt{2}}\right)^{2025} - \left(\frac{z_A}{5\sqrt{2}}\right)^{2023}$

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون a^n تخيلياً صرفاً موجباً.

(4) (أ) عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ADBC$ مستطيل.

(ب) عين z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[BC]$ ثم بين أن النقط I, O, D على استقامة واحدة .

(5) عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|-iz + i - 3| = |z - 5 - 5i|$ ثم أنشئها في المعلم السابق.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات حمراء و 3 كريات بيضاء ، كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب من الكيس 3 كريات عشوائياً وفي آن واحد . نعتبر الحوادث التالية:

A : "الكريات المسحوبة كلها حمراء " ، B : "توجد كرية واحدة حمراء " ، C : "توجد على الأقل كرية واحدة بيضاء " .

(1) أحسب احتمال كل حدث من الحوادث التالية : A, B, C .

(2) نضع من الكيس الكريات البيضاء ونضع مكانها n كرية سوداء حيث n عدد طبيعي و يحقق: $n \geq 2$.
نسحب عشوائيا من الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع .

- نقترح اللعبة التالية: سحب كرية حمراء يخسر 10 نقاط ، وسحب كرية سوداء يربح 5 نقاط .
ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها .
(أ) ماهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

(ب) بين أن
$$P(X=10) = \frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$$

(ج) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضيائي $E(X)$.
(د) عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .
(هـ) كيف نختار عدد الكريات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) في الشكل المقابل (Δ) مستقيم معادلته $y = x + 1$ و (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^x$

(1) بقراءة بيانية برر لماذا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - (x+1) \geq 0$

(2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - e^x$

(أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g (لا يطلب حساب النهايات) .

(ب) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-2.2 < \alpha < -2.1$

(ج) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = e^{2x} - x^2 e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$$

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

(ب) أثبت أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = -2 \cdot e^x \cdot g(x)$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عين بدون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ فسر النتيجة بيانيا .

(4) أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(5) أثبت أن : $f(\alpha) = \alpha^2(1 - \frac{1}{4}\alpha^2)$ ثم عين حصارا لـ $f(\alpha)$.

(6) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (T) و (C_f) . (نقبل أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث : $-0.8 < \beta < -0.7$ و نأخذ $f(\alpha) = -0.53$.)

(7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = 2x + |m|$.

(8) نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $H(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

(أ) برهن أن H دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 e^x$ على $\mathbb{R}$.

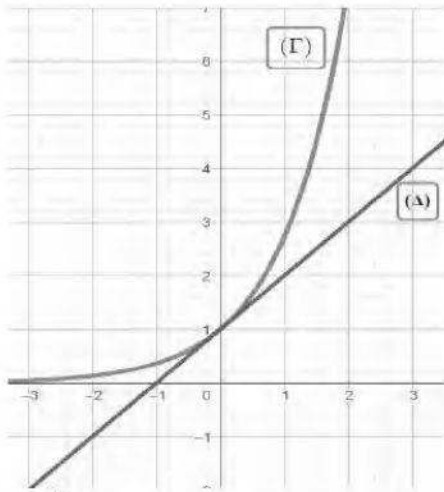
(ب) أحسب بدلالة α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين المعرفين

بالمعادلتين : $x = -4$ و $x = \alpha$.

(III) نعتبر الدالة K المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $K(x) = e^{-2x} - x^2 \cdot e^{-x}$

(أ) بين أن K دالة زوجية .

(ب) أشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_K) الممثل للدالة K ثم أرسمه في المعلم السابق .



تصحيح بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات دورة ماي 2023 الموضوع الأول

التمرين الأول: 05 نقاط

(1) الإجابة (ب)

$0 = y' + 2y - 2$ (*) معناه: $-y' = -2y + 2$ معناه: $y' = 2y - 2$ ومنه: $a = 2$ و $b = -2$
الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (*) هي الدالة التي تحقق: $f(x) = Ce^{2x} + 1$ و $f(0) = 2024$ أي $C + 1 = 2024$ ومنه $C = 2023$
ومنه الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (*) هو الدالة التي تحقق: $f(x) = 2023e^{2x} + 1$

(2) الإجابة (ج)

حلول المتراجحة: $9^x - 4.3^x + 4 \leq 0$ أي $3^{2x} - 4.3^x + 4 \leq 0$ أي $(3^x)^2 - 4.3^x + 4 \leq 0$

نضع: $3^x = t$ تصبح المتراجحة $t^2 - 4t + 4 \leq 0$.

المعادلة $t^2 - 4t + 4 = 0$ تقبل حلا مضاعفا لأن: $\Delta = 16 - 16 = 0$ و هو: $t_1 = t_2 = 2$

ومنه: $t^2 - 4t + 4 \leq 0$ تكافئ: $(t - 2)^2 \leq 0$ وتكون المتراجحة محققة من أجل $t = 2$

أي: $3^x = 2$ أي $x \ln 3 = \ln 2$ ومنه: $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ إذن حلول المتراجحة هي: $S = \left\{ \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$.

(3) الإجابة (ب)

لدينا: $n \geq 2$ و $n \geq 3$ ومنه: $n \geq 3$

المعادلة: $6.C_n^3 + A_n^2 = 36$ تكافئ: $6 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 36$

تكافئ: $(n-2) \cdot (n-1) \cdot n + (n-1) \cdot n = 36$

تكافئ: $(n^2 - 3n + 2)n + (n^2 - n) = 36$

تكافئ: $n^3 - 2n^2 + n - 36 = 0$

الجذر: $n = 4$ أي: $n^3 - 2n^2 + n - 36 = (n-4) \cdot (n^2 + 2n + 9)$

إما $n = 4$ أو $n^2 + 2n + 9 = 0$ والمعادلة ليس لها حلا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta < 0$ إذن قيمة $n = 4$

(4) الإجابة (ج)

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\ln 2} \frac{2e^{-x}}{2e^{-x} + 1} dx \\ &= \frac{-1}{\ln 2} \left[\ln(2e^{-x} + 1) \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{-1}{\ln 2} [\ln 2 - \ln 3] \\ &= -1 + \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

(5) الإجابة (أ)

$Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ فإن الشكل الاسمي لـ Z هو: $Z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

قيم n التي من أجلها $Z^n \in \mathbb{R}$ معناه $\arg(Z^n) = k\pi$ أي $\arg(Z) = k\pi$ أي $n \frac{\pi}{4} = k\pi$ ومنه $n = 4k$ حيث

k عدد طبيعي.

التمرين الثاني : (05 نقاط)
(1) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{x^2+1} : [0, +\infty[\text{ على } f \text{ قابلة للإشتقاق}$$

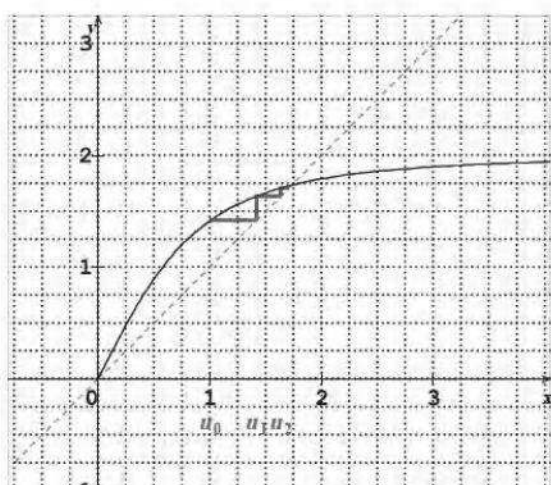
$$\text{ومنه: } f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$$

إذن مهما يكن $x \in [0, +\infty[: f'(x) > 0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

ب) لدينا : $x \in [0, \sqrt{3}]$ أي : $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, \sqrt{3}]$ لأنها متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$.

إذن : $f(0) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$.

لدينا : $f(0) = 0$ ، $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ، و منه $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$.
(2) أ) تمثيل الحدود : $u_0 ; u_1 ; u_2$



ب) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية:

بما ان الحدود مرتبة ترتيبا تصاعديا أي : $u_0 < u_1 < u_2 < \dots$ فإن المتتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و تتقارب عند العدد $\sqrt{3}$.

ج) البرهان بالتراجع : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

نضع $P(n)$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$

ولدينا $1 \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $1 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$ إذن $P(0)$ محققة .

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ و نبين أن $P(n+1)$ صحيحة أي : $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

لدينا من فرضية التراجع $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1, \sqrt{3}]$

فإن : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$ أي : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ و $\sqrt{2} > 1$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ و منه $P(n+1)$ صحيحة .

إذن الاستلزام صحيح و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n\sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{1+u_n^2}} \text{ أي : } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n \quad (د)$$

0, 5	$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{1 + u_n^2})}{\sqrt{1 + u_n^2}} \quad \text{أي :}$ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ أي: $1 \leq u_n^2 \leq 3$ أي: $2 \leq u_n^2 + 1 \leq 4$ ومنه : $0 \leq 2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 1 \quad \text{أي :} \quad 2 - 2 \leq 2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2 - 1 \quad \text{ومنه :} \quad -2 \leq -\sqrt{u_n^2 + 1} \leq -\sqrt{2}$ ومنه : $2 - \sqrt{u_n^2 + 1} > 0$ و بالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن : (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
0, 25	بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$ فهي متقاربة. (3) نبرهن أن (V_n) متتالية هندسية . $V_{n+1} = qV_n \quad \text{متتالية هندسية معناه}$
0, 5	لدينا : $V_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}}{3 - \frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{-u_n^2 + 3} = 4 \left(\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \right)$ أي $V_{n+1} = 4V_n$ إذن : $V_{n+1} = 4V_n$ ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $V_0 = \frac{1}{2}$.
0, 25	- عبارة V_n بدلالة n : $V_n = V_0 \cdot q = \frac{1}{2} 4^n$ ومنه : $V_n = \frac{1}{2} (4)^n$ ب) عبارة u_n بدلالة n : $V_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ أي : $3V_n - V_n \cdot u_n^2 = u_n^2$ أي : $3V_n = V_n \cdot u_n^2 + u_n^2$ أي : $u_n = \pm \sqrt{\frac{3V_n}{1 + V_n}} \quad \text{أي :} \quad u_n^2 = \frac{3V_n}{1 + V_n} \quad \text{ومنه :} \quad u_n^2 \cdot (1 + V_n) = 3V_n$
0, 25	- بما أن : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ فإن : $u_n = \sqrt{\frac{3V_n}{1 + V_n}}$ إذن : $u_n = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \cdot (4)^n}{1 + \frac{1}{2} \cdot (4)^n}}$ - حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \cdot (4)^n}{1 + \frac{1}{2} \cdot (4)^n}}$ أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{2.4^{-n} + 1}}$
0, 25	أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{2.e^{-n \ln 4} + 1}} = \sqrt{3}$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \ln 4} = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$
0, 5	ج) حساب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = \frac{3}{3 - u_0^2} + \frac{3}{3 - u_1^2} + \dots + \frac{3}{3 - u_n^2}$ لدينا : $V_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ أي : $V_n + 1 = \frac{3}{3 - u_n^2}$ ومنه : $S_n = (V_0 + 1) + (V_1 + 1) + \dots + (V_n + 1)$ أي : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n + (n + 1)$ أي : $S_n = \frac{V_0}{q - 1} \cdot (q^{n+1} - 1) + (n + 1)$ أي : $S_n = \frac{1}{6} \cdot (4^{n+1} - 1) + (n + 1) \quad \text{ومنه :} \quad S_n = \frac{1}{3} \cdot (4^{n+1} - 1) + (n + 1)$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

U_1 : السحب على التوالي دون إرجاع الكرتين ، U_2 : السحب على التوالي مع إرجاع الكرتين .
 A "سحب كرتين من نفس اللون إما من الصندوق الأول أو من الصندوق الثاني.
عدد الحالات الممكنة لسحب الكرتين من الصندوق U_1 هو : $A_3^2 = 56$.

عدد الحالات الممكنة لسحب الكرتين من الصندوق U_2 هو عدد قوائم : $5^2 = 25$.

$$P(A) = P(R \cap U_1) + P(V \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(V \cap U_2)$$

$$. P(A) = \frac{689}{1400} \text{ و منه : } P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_3^2}{A_8^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3^2 + 2^2}{5^2} \right) \text{ أي :}$$

B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم بمعنى كرتين تحملان رقم 1 من U_1 أو كرتين تحملان الرقم 0 من U_1 أو كرتين تحملان الرقم 0 من U_2 أو 1 من U_2 أو 2 من U_2 .

$$. P(B) = \frac{583}{1400} \text{ و منه : } P(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{56} + \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{25} \right)$$

$$(2) \text{ نبيّن أن : } P(A \cap B) = \frac{3}{175}$$

$A \cap B$ تعني سحب كرتين من نفس اللون و من نفس الرقم و من U_1 أو U_2 .

$$. P(A \cap B) = \frac{37}{175} \text{ و منه : } P(A \cap B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{56} + \frac{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}{25} \right)$$

الحدثان A و B مستقلان معناه : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ أي : $P(A \cap B) = \frac{689}{1400} \cdot \frac{583}{1400}$ أي :

$$. P(A \cap B) = \frac{37}{175} \approx 0,21 \text{ و } P(A) \cdot P(B) = \frac{401687}{1960000} \approx 0,20$$

إذن : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ و منه : الحدثان A و B غير مستقلان.

(3) ليكن الحدث C : "سحب كرتين من لونين مختلفين "

$$. P(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{2(A_3^1 \times A_4^1)}{56} + \frac{2(3^1 \times 2^1)}{25} \right) = \frac{711}{1400}$$

$$. P(C) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{711}{1400} \text{ طريقة 2 :}$$

$$P(U_1 \cap C) = \frac{2(A_3^1 \times A_4^1)}{56} \times \frac{1}{2} \text{ حيث : } P_c(U_1) = \frac{P(U_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{15}{56} \times \frac{1400}{711} = \frac{15}{56}$$

$$\text{و منه : } P_c(U_1) = \frac{125}{237}$$

(4) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

قيم المتغير العشوائي هي : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$, P(X=1) = \frac{2(A_2^1 \times A_4^1) + A_3^2}{56} = \frac{24}{56} , P(X=1) = \frac{2(A_2^1 \times A_3^1)}{56} = \frac{20}{56} , P(X=0) = \frac{A_2^2}{56} = \frac{2}{56}$$

$$. P(X=1) = \frac{2(A_4^1 \times A_3^1)}{56} = \frac{10}{56}$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

قيم X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{56}$	$\frac{20}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{10}{56}$

0,25

حساب الامل الرياضياتي: $E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} X_i \cdot P_i = \frac{20}{56} + \frac{48}{56} + \frac{30}{56}$ أي: $E(X) = \frac{98}{56}$ و منه: $E(X) = \frac{7}{4}$.

0,25

$$E(-3X+7) = -3\left(\frac{7}{4}\right) + 7 = \frac{7}{4}$$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

0,5

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x \ln x)^2 + \ln x + 1$.

(1) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,32 < \alpha < 0,33$.

لدينا: الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ فهي رتيبة تماما ومستمرة.

و: $g(0,32) \approx -0,01$ ، $g(0,33) \approx 0,03$ و $g(0,32) \cdot g(0,33) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α و يحقق: $g(\alpha) = 0$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

0,25

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

إشارة $g(x)$:

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1}{x \ln x}$.

0,25

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x \ln x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0^-$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = +\infty$

لدينا:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

0,25

نستنتج أن $x=0$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور الترتيب.

0,25

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = +\infty \quad (\text{ب})$$

0,25

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = -\infty$$

0,25

نستنتج أن $x=1$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور الترتيب.

0,25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = +\infty$$

0,5

(2) الدالة f قابلة للإشتقاق على المجالين $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$ دالتها المشتقة f' حيث: $f'(x) = 1 + \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$

$$\text{أي: } f'(x) = \frac{g(x)}{(x \ln x)^2} \text{ و منه: } f'(x) = \frac{(x \ln x)^2 + \ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

0,25

x	0	a	$1 + \infty$
$f'(x)$	-	0	+

(ب) إشارة f' من إشارة $g(x)$:

0,25

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجالين $[\alpha; 1[$ و $]1; +\infty[$.

0,25

x	0	a	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)=3$	$+\infty$	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

(3) نبين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x \ln x} \right) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x \ln x} \right) = 0$.
 إذن $y = x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

0,25

x	0	1	$+\infty$
$-x$	0	-	-
$\ln x$	-	0	+
$f(x) - x$	+	-	-

- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

ومنه : على المجال $]0; 1[$ (C_f) يقع فوق (Δ) وعلى المجال $]1; +\infty[$ (C_f) يقع تحت (Δ) .

(4) $y = x + \beta$ تعيين β حتى يكون (T) مماسا للمنحنى (C_f) معناه : $f'(a) = 1$

0,25

أي : $\frac{(a \ln a)^2 + \ln a + 1}{(a \ln a)^2} = 1$ أي : $\ln a + 1 = 0$ أي : $\ln a = -1$: ومنه : $a = e^{-1}$.

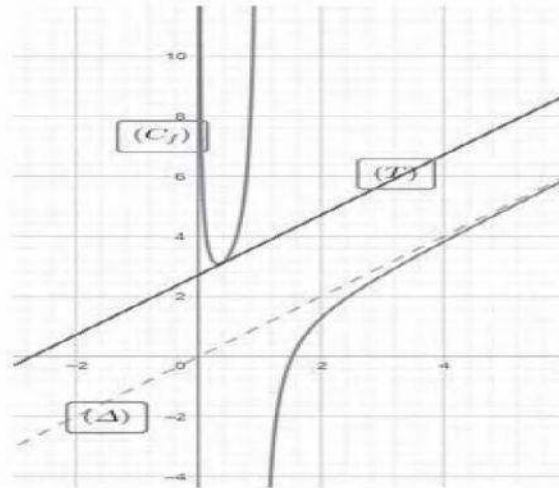
$$f(e^{-1}) = e^{-1} + e \quad \text{و} \quad f'(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{1}{e^{-1} \ln e^{-1}} = e^{-1} + \frac{1}{e^{-1}}$$

0,25

(T) أي : $y = f'(e^{-1}) \cdot (x - e^{-1}) + e^{-1} + e$ أي : $y = x - e^{-1} + e^{-1} + e$ ومنه : $y = x + e$ هي معادلة المماس (T)

0,25

أي : $\beta = e$ ومنه نقطة التماس $A(e^{-1}, e^{-1} + e)$.



(6) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $X = e^{\frac{1}{Xm}}$ حلين متمايزين:

لدينا: $X = e^{\frac{1}{Xm}}$

من أجل $x > 0$: $x \ln x = \frac{x}{xm}$

من أجل $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$: $\frac{x}{x \ln x} = m$

أي: $x - \frac{1}{x \ln x} = x - m$

ومنه: $f(x) = x - m$

حلول المعادلة (I) هو إيجاد فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) و المستقيم $y = x - m$ أي:

المعادلة تقبل حلين متمايزين معناه: $-m > e$ أي: $m < -e$ أي: $m \in]-\infty; -e[$.

(7) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين: $x = 3$ ، $x = 4$:

$$A = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 3) \text{ أي: } A = [\ln(\ln x)]_3^4 \text{ أي: } A = \int_3^4 \left(\frac{1}{\ln x} \right) dx \text{ أي: } A = \int_3^4 (x - f(x)) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x \ln x} \right) dx$$

ومنه: $A = \ln\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right) \text{ cm}^2$

(I) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$: $h(x) = [f(x)]^2$

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجالين $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$ ودالتها المشتقة h' حيث: $h'(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f(x)$ و $f'(x)$.

x	0	a	1	λ	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	+	+	
$f(x)$	+	+	-	0	+	
$h'(x)$	-	0	+	-	0	+

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha]$ و $]1; \lambda]$ و متزايدة تماما على المجالين $[\alpha; 1[$ و $[\lambda; +\infty[$.

x	0	a	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	+	+	-	0
$h'(x)$	-	0	+	+
$h(x)$	$+\infty$	9	$+\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)]^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]^2 = +\infty$$

$$, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)]^2 = +\infty$$

<u>0.25×2</u>	$u_0 = \alpha$ (1) أ- لدينا $u_{n+1} = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ تعين α حتى تكون المتتالية ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = \dots = u_0 = \alpha$ ومنه $\alpha = (\ln 2)\alpha + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ $\alpha = \frac{\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)}{1 - \ln(2)} = \frac{\ln\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2\right)}{\ln(e) - \ln(2)}, \alpha = \frac{2\ln\left(\frac{e}{2}\right)}{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}, \alpha = 2$ إذن $\alpha = 2$. (2) نضع $u_0 = 3$ ومنه $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \end{array} \right\}$ أ- برهان بالتراجع : نسمى $P_{(n)}$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 < u_n \leq 3$ نتحقق من أجل $P_{(0)}$ لدينا $u_0 = 3$ ومنه $2 < u_0 < 3$ محققة نفرض صحة الخاصية $P_{(n)}$ من أجل n عدد طبيعي كفي ، ثم نبين صحتها من أجل $(n+1)$. لدينا من فرضية التراجع $2 < u_n \leq 3$ ومنه
<u>0.25</u>	
<u>0.25</u>	

$$2 \ln 2 < (\ln 2) u_n \leq 3 \ln 2$$

$$2 \ln 2 + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) < (\ln 2) u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \leq 3 \ln 2 + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$$

$$2 < u_{n+1} \leq 3 \quad \ln(2^2) + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) < u_{n+1} \leq \ln(2^3) + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$$

$$\ln\left(4 \times \frac{e^2}{4}\right) < u_{n+1} \leq \ln\left(2^3 \times \frac{e^2}{4}\right)$$

$$2 < u_{n+1} \leq 2 + \ln(2) \leq 3$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع (حسب الخاصية الوراثية) فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :
 $2 < u_n \leq 3$

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2) u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) - u_n$$

$$.. u_{n+1} - u_n = (\ln 2) u_n + \ln(e^2) - \ln(4) - u_n \quad \text{ب- حساب}$$

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1) u_n + 2 - 2 \ln 2 = (\ln 2 - 1) u_n - 2(-1 + \ln 2)$$

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$$

$$. u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2) \quad \text{ومنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن}$$

ت-دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2) \quad \text{لدينا} \\ \text{و } 2 < u_n \leq 3 \text{ فإن } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ من أجل } (\ln 2 - 1) < 0$$

كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$ **0.25**

بما ان المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة **0.25**

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\text{نحل المعادلة : } l = (\ln 2) l + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \text{ أي } l = (\ln 2) l + 2 - 2 \ln 2 \text{ أي } l(1 - \ln 2) = 2(1 - \ln 2)$$

$$\text{ومنه : } l = 2$$

أ- اثبات ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية : حساب v_{n+1} :

0.75

$$v_n = 2u_n - 4; \quad v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 \quad ; \quad v_{n+1} = 2 \left((\ln 2)u_n + \ln \left(\frac{e^2}{4} \right) \right) - 4$$

$$v_{n+1} = 2 \left((\ln 2)u_n + 2 - \ln 4 \right) - 4 ; \quad v_{n+1} = 2(\ln 2)u_n + 4 - 4 \ln 2 - 4; \quad v_{n+1} = \ln 2(2u_n - 4)$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \ln 2$ وحدها الأول $v_0 = 2$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

0.25

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = 2(\ln 2)^n$ ثم كتابة u_n بدلالة v_n

$$v_n = 2u_n - 4 \quad ;$$

$$2u_n = v_n + 4 \quad ; \quad u_n = \frac{1}{2}v_n + 2$$

0.25

بالتعويض نجد $u_n = (\ln 2)^n + 2$

0.25

ت- حساب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(\ln 2)^n + 2] = 2$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$

$$S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{\ln 4}{u_1 - 2} + \frac{(\ln 4)^2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} \quad : \text{حساب المجموع (6)}$$

0.25

$$\frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} = 2^n \quad \text{تحقق أن}$$

$$v_n = 2u_n - 4 \quad ; \quad \frac{v_n}{2} = u_n - 2 \quad ; \quad \frac{1}{\frac{v_n}{2}} = \frac{1}{u_n - 2} \quad ;$$

لدينا :

$$\frac{1}{u_n - 2} = \frac{2}{v_n} = \frac{2}{2(\ln 2)^n} \quad ; \quad \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} = \frac{(2 \ln 2)^n}{(\ln 2)^n} = \frac{2^n (\ln 2)^n}{(\ln 2)^n} = 2^n$$

$$S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{1}{1-2} (1 - 2^{n+1}) \quad \text{المجموع}$$

$$S_n = -1 + 2^{n+1}$$

0.5

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$\overline{z_1} - 1 + 3i = 0 ; z_1 = 1 + 3i$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4(50)(1) = -100 ; \Delta = 100i^2$$

$$z_2 = 5 + 5i ; z_3 = 5 - 5i ; S = \{1 + 3i ; 5 + 5i ; 5 - 5i\}$$

(2) أ- كتابة كل من $z_A ; z_B$ على الشكل الأسّي :

$$|z_A| = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$$

0.25

$$z_A = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } \arg(z_A) = \theta \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$|z_B| = |\overline{z_A}| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{أي } \arg(z_B) = \arg(\overline{z_A}) = \theta \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

0.25

$$z_B = 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

0.25

ب) تعليم النقاط :

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \text{ (ج) طول العدد المركب}$$

0.25 × 2

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = \left| \frac{(5 + 5i) - (1 + 3i)}{(5 - 5i) - (1 + 3i)} \right| = \left| \frac{(4 + 2i)(4 + 8i)}{(4 - 8i)(4 + 8i)} \right| = \left| \frac{16 - 16 + 40i}{16 + 64} \right|$$

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = \left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} : \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \text{ عمدة العدد المركب}$$

0.25

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}; (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (د)$$

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$$

0.25

المثلث ABC قائم في C

$$CB = 2CA; CA = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ و}$$

$$\cdot \frac{CB \times CA}{2} = \frac{2(2\sqrt{5})(2\sqrt{5})}{2} = 20 \text{ u.a هي مساحة المثلث } ACB$$

0.25

(أ) كتابة العدد a على الشكل الجبري:

$$a = \left(\frac{-z_B}{5\sqrt{2}} \right)^{2025} - \left(\frac{z_A}{5\sqrt{2}} \right)^{2021}$$

$$= -e^{i\frac{-\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= -\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = \sqrt{2} i$$

0.25

(ب) تعيين قيم n حتى يكون a^n تخيليا صرفا:

$$\arg(a^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi : a^n \text{ تخيليا صرفا معناه}$$

$$\text{لدينا : } a = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه : } a^n = \sqrt{2} e^{i\frac{n\pi}{2}} \text{ معناه : } \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و منه : } n = 1 + 2k$$

(3) أ- تعيين z_D حتى يكون الرباعي $ABDC$ مستطيل معناه $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ و منه

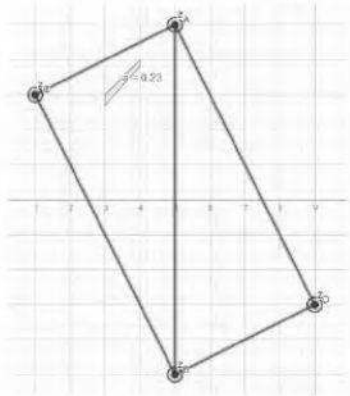
$$z_D - z_A = z_B - z_C$$

$$z_D = z_B - z_C + z_A$$

$$z_D = 5 - 5i - 1 - 3i + 5 + 5i \text{ و منه}$$

$$z_D = 9 - 3i$$

0.25

ب- لاحقة z_I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1 + 3i + 5 - 5i}{2} = 3 - i$$

0.25

$$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OI} \text{ أي } \frac{z_D - z_O}{z_I - z_O} = \frac{9 - 3i}{3 - i} = 3$$

0.25	تبيين أن نقاط على استقامية ومنه النقاط D, I, O في استقامية واحدة
0.25	طبيعة (Γ) حيث $ -i.z + i - 3 = z - 5 - 5i $ $ -i.\left(z + \frac{i-3}{-i}\right) = -i \left z + \frac{i-3}{-i}\right = z - 1 - 3i $ $ z - (3+i) = z - (5+5i) ; z - z_C = z - z_A $ $CM = AM$
0.25	الإنشاء:

	التمرين الثالث 04 نقاط
0.25	عدد الحالات الممكنة هو : $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!}$ ومه $C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$
0.5	-حساب $P(A)$: $P(A) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$; $P(A) = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$
0.5	حساب $P(B)$: $P(B) = \frac{C_5^1 \times C_3}{C_8^3}$; $P(B) = \frac{5 \times 3}{56} = \frac{15}{56}$
0.5	$P(C) = 1 - P(A)$ حساب $P(C)$: نلاحظ أن الحدث C هو الحدث المعاكس لـ A ومنه $P(C) = 1 - \frac{5}{28}$ $P(C) = \frac{23}{28}$
0.25 × 3	(2) القيم الممكنة لـ $X = \{-5; 10; -20\}$ حساب : $p(X = -5) = \frac{2A_n^1 \times A_5^1}{A_{n+5}^2} = \frac{10n}{(n+4)(n+5)}$
0.25	$p(X = 10) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$ $p(X = -20) = \frac{A_5^2}{A_{n+5}^2} = \frac{20}{(n+4)(n+5)}$

0.5

X_i	-20	-5	10
$p(X = X_i)$	$\frac{20}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{10n}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$
$p(X = X_i)$ X_i	$\frac{-400}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{-50n}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{10n^2 - 10n}{(n+4)(n+5)}$

0.25

$$. E(x) = \frac{10n^2 - 60n - 400}{(n+4)(n+5)} \text{ الأمل الرياضي}$$

0.25

$$. n = 10 : \text{ومنه} \quad E(x) = 0 \quad \text{قيم } n \text{ حتى تكون اللعبة عادلة اذا كان} : 10n^2 - 60n - 400 = 0$$

0.25

$$. n > 10 \text{ ومنه } E(X) > 0 : \text{قيم } n \text{ حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب}$$

يمكن اختيار عدد الكريات السوداء احدى عشرة كرية على الأقل لكي تكون اللعبة مربحة.

التمرين الرابع 07 نقاط

(1

0.25

(1) - بقراءة بيانية بما أن (Γ) فوق (Δ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن

$$. e^x - (x+1) \geq 0$$

(2) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = 2x + 1 - e^x = -(e^x - (x+1)) \quad \text{حساب } g'(x) :$$

$$g'(x) \leq 0 ; x \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[0; +\infty[$.

ب- برهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $-2.2 < \alpha < -2.1$

(مبرهنة القيم المتوسطة)

0.25 بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً لأنها متناقصة تماماً على المجال $]-2.2; -2.1[$

0.25 حسب مبرهنة القيم المتوسطة
$$\begin{cases} g(-2.2) = 0.11 \\ g(-2.1) = -0.02 \end{cases} \quad g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$ و $g(\alpha) = 0$.

0.25 ج- جدول إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - x^2 e^x) = 0 \quad (1)$$

0.5 إذن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$

ب-

0.25
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^2 e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{2x} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

(1) أ- حساب $f'(x)$: الدالة f معرفة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة

0.25
$$f'(x) = 2e^{2x} - 2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x = 2e^x \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + e^x \right)$$

$$f'(x) = -2e^x \cdot g(x)$$

0.25 إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
$f'(a)$	-	0	+

ب) اتجاه تغير : جدول الإشارة $f'(x)$

0.25 الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ و الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

- جدول تغيرات :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(a)$	$+\infty$

$$(2) \text{ تعين } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+\alpha) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = 0$$

منحنى (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة $x_\alpha = \alpha$ معادلته $y = f(\alpha)$.

$$(3) \text{ معادلة المماس (T) عند } 0 : y = 2x + 1 \dots (T) \quad \left. \begin{array}{l} f'(0) = 2 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} g(\alpha) = 0 ; e^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha \\ f(\alpha) = e^{2\alpha} - \alpha^2 e^\alpha = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha\right)^2 - \alpha^2 \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha\right) \\ f(\alpha) = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right) \end{cases}$$

(4) إثبات أن

$$-2.2 < \alpha < -2.1 ; (-2.1)^2 < \alpha^2 < (-2.2)^2$$

$$1 - \frac{(-2.2)^2}{4} < 1 - \frac{1}{4}\alpha^2 < 1 - \frac{(-2.1)^2}{4}$$

الحصر

$$(-2.1)^2 \left(1 - \frac{(-2.2)^2}{4}\right) < \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right) < (-2.2)^2 \left(1 - \frac{(-2.1)^2}{4}\right)$$

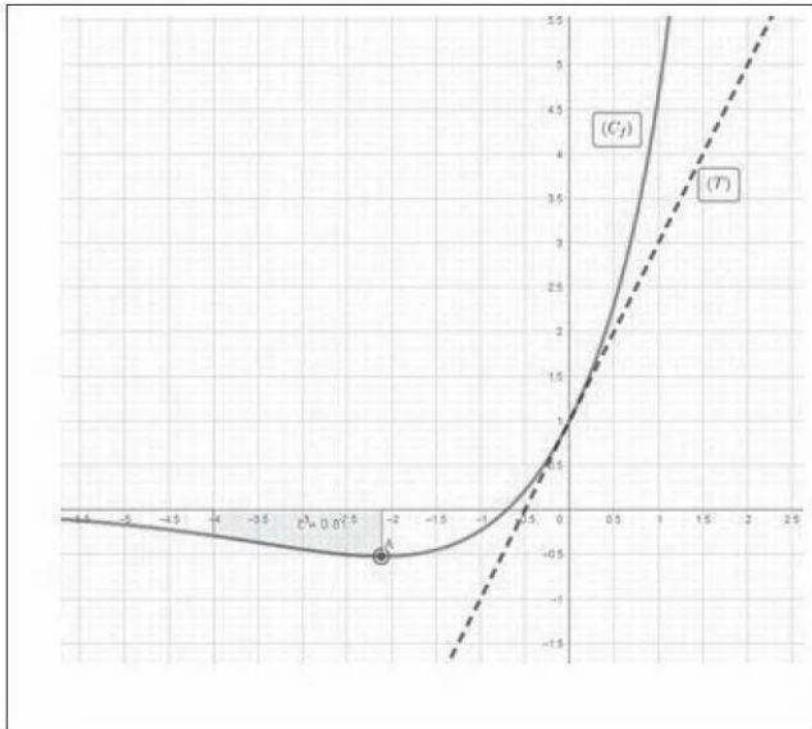
$$-0.9261 < f(\alpha) < -0.4961$$

نأخذ $f(\alpha) = -0,53$

0.25

(6) حساب $f(1)$ ومنه $f(1) = e^2 - e$

الرسم :



0.25

(7) مناقشة بيانية :

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = 2x + |m| \\ y = f(x) \end{cases} \quad \text{تغني} \quad f(x) = 2x + |m| \dots\dots (I)$$

هو إيجاد فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) و المستقيم (Δ_m) معادلته $y = 2x + |m|$

إذا كان $|m| < 1$ معناه $-1 \leq m \leq 1$ فإن المعادلة (I) ليس لها حلا في $\mathbb{R}$.

إذا كان $|m| = 1$ معناه $m = 1$ أو $m = -1$ فإن المعادلة (I) تقبل حلا مضاعفا

معنوما.

إذا كان $|m| > 1$ أي: $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ فإن المعادلة (I) تقبل حلين مختلفين في

الإشارة .

(8) أ) حساب $H'(x)$ الدالة H معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$H'(x) = (2x - 2 + x^2 - 2x + 2)e^x$$

H أصلية الدالة h على $\mathbb{R}$.

$$H'(x) = x^2 e^x \quad ; \quad H'(x) = h(x)$$

(ب) حساب مساحة الحيز بدلالة α .

$$A = \int_{-4}^{\alpha} (0 - f(x)) dx = -\frac{1}{2} \int_{-4}^{\alpha} 2e^{2x} dx + \int_{-4}^{\alpha} x^2 e^x dx$$

$$A = \left[H(x) - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-4}^{\alpha}$$

$$A = \left[\frac{-1}{2} e^{2\alpha} + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-8} - 26e^{-4} \right]$$

(III) أ- إثبات أن الدالة K زوجية : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

$$K(-x) = K(x) \text{ حساب}$$

ب- كيفية إنشاء (C_K) :

على المجال $]-\infty; 0]$ المنحنى (C_K) ينطبق على (C_f) .

على المجال $[0; +\infty[$ $K(x) = f(-x)$ و عليه المنحنى (C_K) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

