



Bao Blanc Mathématiques S Mai 2024 Lycée ElHouria

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية



الثانوية: الحرية
المستوى: ثالثة ثانوي
المعامل: 5

مديرية التربية لولاية قسنطينة
المادة: الرياضيات
الشعبة: علوم تجريبية
الإثنين 13 ماي 2024

المدة: 3 ساعات ونصف ساعة

البكالوريا البيضاء

دورة ماي 2024

على المترشحة أن تختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن):

(1) نرمي قطعة نقدية مزيفة مرة واحدة، نرمز للظهر بالرمز P وللوجه بـ F . أحسبي احتمال كل من الظهر والوجه علماً أنّ احتمال ظهور الظهر يُساوي أربع مرات احتمال ظهور الوجه.

(2) نرمي الآن قطعة نقدية n مرة حيث: $n \geq 1$ ، نُسمي الحادثتين:

A : «حادثه الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل خلال n رمية». و F_n : «حادثه الحصول على الوجه في الرمية n ».

أ- أحسبي الاحتمالين $P(F_3)$ و $P(\overline{F_3})$.

ب- بيّني أنّ: $P(A) = \frac{5^{n-4} - 4^n}{5^n}$.

(3) نفرض في كل مما يلي: $n = 3$.

يضع اللاعب في البداية مبلغ قيمته 30DA ثم يرمي القطعة النقدية السابقة، ومن أجل كل رمية نعتبر:

- ظهور الوجه ثلاث مرات يكسب اللاعب 3kDA.

- ظهور الوجه مرتين يكسب اللاعب 6kDA.

- ظهور الوجه مرة واحدة يكسب اللاعب 5kDA.

- ظهور الظهر ثلاث مرات لا يكسب اللاعب شيئاً.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي من أجله يربح اللاعب من خلال الفرق بين ما يدفعه وما يكسبه.

أ- ماهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

ب- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج- ابتداءً من أية قيمة للعدد الطبيعي k تكون اللعبة في صالح منظم اللعبة؟

التمرين الثاني (4ن): لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3}} + 8.$$

(1) برهني بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 12 - u_n^2$.

أ- بيّني أنّ المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- عبّر عن v_n بدلالة n ، ثمّ إستنتجي عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسبي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسبي بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ ، ثم أحسبي $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثالث (5ن):

- (1) نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث :

$$z^2 - (1 + 5i)z - 8 + 4i = 0 \dots (E)$$
 - أ- جدي الجذور التربيعية للعدد المركب $(8 - 6i)$.
 - ب- حلّي في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق: $z_A = i$ ، $z_B = 2 + 2i$ و $z_C = -1 + 3i$.
 ولتكن النقطة M ذات اللاحقة: $z_M = m$ ، حيث: $m \in \mathbb{C}^*$.
 - أ- عيّني طبيعة (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O ، C و M في إستقامية.
 - ب- عيّني طبيعة (Δ) مجموعة النقط M حتى يكون المثلث OCM قائم في O .
 - ج- حدّدي طبيعة المثلث ABC معللاً إجابتك.
- (3) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، والتحاكي H ذو المركز A والنسبة -2 .
 - أ- أكتب العبارة المركبة للتحويلين R و H .
 - ب- عيّني طبيعة التحويل النقطي T المعرّف بـ: $T = R \circ H$ ، (هو رمز التركيب).
 - ج- لتكن C' صورة النقطة C بالتحويل T ، برهني أنّ النقط A ، B و C' في إستقامية.
- (4) عيّني (Y) مجموعة النقط M حتى تكون النقط A ، B ، C و M تنتمي إلى نفس الدائرة.

التمرين الرابع (7ن):

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$.
 - (1) أدرسي تغيّرات الدالة g وشكلي جدول تغيّراتها.
 - (2) بيّني أنّ المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.7 < \alpha < 1.8$.
 - (3) إستنتجي إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.
 وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث :
 $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
 - (1) أحسبي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - (2) أثبتني أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً، فإنّ: $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$.
 - (3) شكلي جدول تغيّرات الدالة f .
 - (4) بيّني أنّ: $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ ، ثمّ إستنتجي حصراً للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).
 - (5) أحسبي $f(3)$ ثمّ أرسمي (C_f) على المجال $]0; 3]$.
- (III) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 \ln x$.
 - (1) بإستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسبي بدلالة λ التكامل $\int_2^\lambda h(x) dx$ ، حيث: $\lambda > 2$.
 - (2) إستنتجي بدلالة λ مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين: $x = \lambda$ و $x = 2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

- D_1 و D_2 زهرتي نرد، النرد D_1 مغشوش وله كل وجهين يحملان نفس الرقم k حيث: $k \in \{1; 2; 3\}$. نرسم بـ u_k احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k .
- (1) أحسبي u_1, u_2 و u_3 ، علماً أن هذه الأعداد تُشكّل حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$.
- (2) النرد D_2 ليس مغشوش وله كل ثلاث وجوه تحمل نفس الرقم p حيث: $p \in \{1; 2\}$. نرسم بـ v_p احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم p .
- أحسبي v_1 و v_2 .
- (3) نرمي النردين D_1 و D_2 في آن واحد، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يُساوي جداء رقمي الوجهين العلويين للنردين D_1 و D_2 بعد السقوط.
- أ- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
- ب- أحسبي $\sigma(2024 - 1445X)$.

التمرين الثاني (4ن):

- لتكن (t_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً معرفّة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} t_0 + t_1 + t_2 = 7\ln 2 \\ t_0 \times t_1 \times t_2 = 8(\ln 2)^3 \end{cases}$
- (1) أحسبي الحدود t_1 ثم t_0 و t_2 .
- (2) إستنتجي الأساس q للمتتالية (t_n) ، ثم أكتبي t_n بدلالة n .
- (3) جدي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يُحقق: $t_n \geq \ln 2^{2974}$.
- (4) أ- أحسبي المجموع S_n بدلالة n والجداء P_n بدلالة n حيث: $\begin{cases} S_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n \\ P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n \end{cases}$
- ب- إستنتجي S'_n بدلالة n حيث: $S'_n = \ln(t_0) + \ln(t_1) + \dots + \ln(t_n)$.
- ج- أحسبي S''_n بدلالة n حيث: $S''_n = t_0^{2024} + t_1^{2024} + \dots + t_n^{2024}$.

التمرين الثالث (5ن):

- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $Z_B = \bar{Z}_A$ و $Z_C = 2$.
- (1) أ- أكتبي العدد المركب: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الأسّي.
- ب- إستنتجي طبيعة المثلث ABC .
- ج- عيّني ω مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .
- (2) أ- عيّني طبيعة وعناصر المجموعة (Γ) للنقط $M(Z)$ التي تُحقق: $ZZ\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$.
- ب- تحققي أن النقطتين A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ) .
- (3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
- أ- عيّني صورة النقطة B بالدوران r .
- ب- عيّني Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r .
- ج- إستنتجي طبيعة الرباعي $ABCD$.
- د- عيّني صورة النقطة Ω بالدوران r ، ثم إستنتجي صورة المجموعة (Γ) بالدوران r .

التمرين الرابع (7ن):

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$.

(1) أدرسي تغيرات الدالة g وشكلي جدول تغيراتها.

(2) أحسبي $g(0)$ ، ثم إستنتجي إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

وَلَيْكُن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$$

(1) أ- أحسبي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب-تحققي أن المستقيم $y = x - 1$: (D) مستقيم مقارب مائل للبيان (C_f) عند $(+\infty)$.

ج-أدرسي وضعية البيان (C_f) بالنسبة إلى (D) .

(2) أ- أثبتني أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$.

ب- أحسبي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(3) أ- أكتبي $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب- إستنتجي إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكلي جدول تغيراتها.

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) - x$ ، والمستقيم $(d): y = x$.

أ- بيّني أن المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2 < \alpha < 3$.

ب- إستنتجي الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(5) أحسبي $f(-\frac{3}{2})$ ثم أرسمي المستقيمين (D) ، (d) والبيان (C_f) على $[\frac{-3}{2}; +\infty[$.

(6) أ- بيّني أن الدالة: $(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \mapsto x$ هي دالة أصلية للدالة: $-x^2 e^{-x} \mapsto x$.

ب- بإستعمال التكامل بالتجزئة، أحسبي بدلالة العدد الحقيقي x ، التكامل: $\int x e^{-x} dx$.

ج- أحسبي بدلالة β ، مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين

ذو المعادلتين: $x = 3$ و $x = \beta$ ، حيث: $\beta > 4$.

العلامة	الموضوع الأول - التصحيح المفصل -
(4 نقاط)	التمرين الأول: نرمي قطعة نقدية مزيفة مرة واحدة، نرمز للظهر بالرمز P وللوجه بـ F. (1) حساب احتمال كل من الظهر والوجه علماً أن احتمال ظهور الظهر يساوي أربع مرات احتمال ظهور الوجه: لدينا: $\begin{cases} P(P) = 4P(F) \\ P(P) + P(F) = 1 \end{cases}$ ومنه: $4P(F) + P(F) = 1$، وعليه فإن: $5P(F) = 1$ أي: $P(F) = \frac{1}{5}$ و $P(P) = \frac{4}{5}$.
(0.25 ن) (0.25 ن)	
(0.25 ن) (0.25 ن)	(2) نرمي الآن قطعة نقدية n مرة حيث: $n \geq 1$، نسمي الحادثتين: A: «حادثة الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل خلال n رمية». F_n: «حادثة الحصول على الوجه في الرمية n». أ- حساب الاحتمالين $P(F_3)$ و $P(\bar{F}_3)$: لدينا: $P(F_3) = P(F) = \frac{1}{5}$ و $P(\bar{F}_3) = P(P) = \frac{4}{5}$.
(0.25 ن) (0.25 ن)	
(0.25 ن)	ب- إثبات أن: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$: لدينا: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$، حيث: $\bar{A}$: «حادثة عدم الحصول على الوجه خلال n رمية». ومن: $P(\bar{A}) = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \dots \cap \bar{F}_n)$. وبما أن الحوادث: $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ مستقلة فإن: $P(\bar{A}) = P(\bar{F}_1) \times P(\bar{F}_2) \times \dots \times P(\bar{F}_n)$. معناه أن: $P(\bar{A}) = [P(P)]^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$، ومنه: $P(A) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1 - \frac{4^n}{5^n}$. إذن: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$.
(1 ن)	(3) أ- القيم الممكنة للمتغير العشوائي X: القيم الممكنة لـ X هي: $\{3k - 30; 6k - 30; 5k - 30; -30\}$.
(0.25 ن)	ب- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X: $P(X = 3k - 30) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P^3(F)$، ومنه: $P(X = 3k - 30) = \left(\frac{1}{5}\right)^3$. و: $P(X = 6k - 30) = P(F_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3) + P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap F_3)$. أي: $P(X = 6k - 30) = 3P^2(F) \times P(P)$، ومنه: $P(X = 6k - 30) = 3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$. و: $P(X = 5k - 30) = P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) + P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3)$. أي: $P(X = 5k - 30) = 3P^2(P) \times P(F)$، ومنه: $P(X = 5k - 30) = 3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$. و: $P(X = -30) = P^3(\bar{F}) = P^3(P)$، أي: $P(X = -30) = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3)$. ومن: $P(X = -30) = \left(\frac{4}{5}\right)^3$.
(0.25 ن) (0.25 ن) (0.25 ن)	

كخلاصة: تعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

(0.25ن)	X_i	$3k - 30$	$6k - 30$	$5k - 30$	-30	$\sum$
	$P(X = X_i)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$	$3\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{125}{125} = 1$
	$X_i \times P(X = X_i)$	$(3k - 30) \times \left(\frac{1}{5}\right)^3$	$(6k - 30) \times 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$	$(5k - 30) \times 3\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$	$(-30)\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{315k - 2454}{125}$

ج - ابتداءً من أية قيمة للعدد الطبيعي k تكون اللعبة في صالح منظم اللعبة؟

تكون اللعبة في صالح اللاعب إذا كان الأمل الرياضي موجباً أي في غير مصلحة منظم اللعبة. والعكس، تكون اللعبة في صالح منظم اللعبة إذا كان الأمل الرياضي سالباً.

معناه أن: $0 < E(X) = \sum X_i \times P(X = X_i) = \frac{315k - 2454}{125} < 0$ ، وهذا يكافئ أن: $315k - 2454 < 0$. أي: $k < \frac{2454}{315} \approx 7.79$.

وهذا يعني أن اللعبة تكون في صالح منظمها إذا كان: $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

التمرين الثاني:

لدينا: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}: \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 8} \end{cases}$

1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$:

من أجل $n = 0$ فإن: $0 \leq u_0 = 0 \leq 2\sqrt{3}$ ، ومنه: $P(0)$ محققة.

نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n أي: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

ونحاول إثبات صحة الخاصية من أجل الدرجة $(n + 1)$ أي: $0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$ ؟

لدينا فرضاً: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3} \xrightarrow{\text{نربع الأطراف الموجبة للمتباينة}} 0 < u_n^2 \leq 12$

وبضرب الأطراف الموجبة لهذه المتباينة في العدد الموجب $\left(\frac{1}{3}\right)$ نجد: $0 \leq \frac{u_n^2}{3} \leq 4$ ، ثم نضيف 8 لأطرافها

نحصل على: $8 \leq \frac{u_n^2}{3} + 8 \leq 12$ ،

ونجذر الأطراف الموجبة لها فنحصل على $2\sqrt{3} = \sqrt{12} \geq \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \geq 0$.

وبالتعدي نجد أن: $0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$.

إذن: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 12 - u_n^2$.

أ - اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية، نطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

(v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $(v_{n+1} = v_n \times q)$.

لدينا: $v_n = 12 - u_n^2$ ،

ومنه: $v_{n+1} = 12 - u_{n+1}^2 = 12 - \left(\frac{u_n^2}{3} + 8\right) = 4 - \frac{u_n^2}{3} = \frac{12}{3} - \frac{u_n^2}{3}$.

وعليه فإن: $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ أي: $v_{n+1} = \frac{1}{3} (12 - u_n^2)$.

مما يدل أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

وحدها الأول: v_0 حيث: $v_0 = 12 - u_0^2 = 12 - 0^2 = 12$ أي: $v_0 = 12$.

(ن0.25)	بكتابة v_n بدلالة n : بما أن (v_n) متتالية هندسية، فمن عبارة الحد العام: $v_n = v_0 \times q^n$.
(ن0.25)	وبالتعويض نجد أن: $v_n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .
(ن0.25)	• استنتاج u_n بدلالة n :
(ن0.25)	لدينا: $v_n = 12 - u_n^2$ ، ومنه: $u_n^2 = 12 - v_n$ ، إذن: $u_n = \sqrt{12 - v_n}$.
(ن0.25)	أي: $u_n = \sqrt{12 - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
(ن0.25)	حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:
(ن0.25)	لدينا: $q = \frac{1}{3} \in]-1; 1[$ ، مما يعني أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
(ن0.25)	ومنه فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{12 - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt{12}$ ، أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\sqrt{3}$.
(ن0.25)	3) حساب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$:
(ن0.25)	لدينا: $v_n = 12 - u_n^2$ ، ومنه: $u_n^2 = 12 - v_n$.
(ن0.25)	و عليه فإن: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 = 12 - v_0 + 12 - v_1 + \dots + 12 - v_n$.
(ن0.25)	إذن: $S_n = (12 + 12 + \dots + 12) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$.
(ن0.25)	أي: $S_n = 12 \times (n + 1) - v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ، إذن: $S_n = 12 \times (n + 1) - 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$.
(ن0.25)	ومنه فإن: $S_n = 12(n + 1) - 12 \times \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$.
(ن0.25)	فينتج: $S_n = 12(n + 1) - 18 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$.
(ن0.25)	• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:
(ن0.25)	لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ ، ومنه فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.
(ن0.25)	التمرين الثالث: نعتبر المعادلة: $(E) \dots z^2 - (1 + 5i)z - 8 + 4i = 0$.
(ن0.25)	1) أ- إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب $(8 - 6i)$:
(ن0.25)	لنعتبر أن: $(x + iy)^2 = 8 - 6i$ ، فهو يُحقق إذن الجملة:
(ن0.25)	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \dots (1) \\ 2xy = -6 \dots (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \dots (3) \end{cases}$
(ن0.25)	وبجمع المعادلتين (1) و (3) نجد أن: $2x^2 = 18$ أي: $x^2 = 9$ ، إذن: إما $x = -3$ أو $x = 3$.
(ن0.25)	ومن المعادلة (2) نجد أن: $y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x}$.
(ن0.25)	من أجل $x = -3$ فإن: $y = 1$ ومن أجل $x = 3$ فإن: $y = -1$.
(ن0.25)	إذن: $(3 - i)^2 = 8 - 6i$ أو $(-3 + i)^2 = 8 - 6i$.
(ن0.25)	بحل المعادلة (E) في $\mathbb{C}$:
(ن0.25)	نحسب المميز Δ :
(ن0.25)	$\Delta = (-1 + 5i)^2 - 4(1)(-8 + 4i) = 1 - 10i - 25 + 32 - 16i$
(ن0.25)	ومنه: $\Delta = 8 - 6i$ ، وحسب السؤال أ- فإن: $\Delta = 8 - 6i = (3 - i)^2 = (-3 + i)^2$.

(ن0.25)	$\begin{cases} z_1 = \frac{1+5i-3+i}{2} = -1 + 3i \\ z_2 = \frac{1+5i+3-i}{2} = 2 + 2i \end{cases}$ و هذا يعني أن للمعادلة (E) حلان متمايزان هما: إذن: $S = \{-1 + 3i; 2 + 2i\}$
(ن0.25)	(2) نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق: $z_A = i, z_B = 2 + 2i, z_C = -1 + 3i$ ولتكن النقطة M ذات اللاحق: $z_M = m$، حيث: $m \in \mathbb{C}^*$. أ- تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O, C, M في استقامية: (النقط O, C, M في استقامية) إذا وفقط إذا $(\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \in \mathbb{R})$. حيث: $\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \in \mathbb{R}$ يكافئ أن: $\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} = \frac{\overline{z_M - z_O}}{\overline{z_C - z_O}}$ ومنه: $\frac{\overline{m}}{-1+3i} = \frac{m}{-1+3i}$ أي: $\frac{\overline{m}}{-1-3i} = \frac{m}{-1+3i}$ وعليه فإن: $m(-1-3i) = \overline{m}(-1+3i)$ إذن: $m(-1-3i) = \overline{m}(-1+3i)$ ومنه: $0 = \overline{m} - m - 3i(\overline{m} + m) = -2i \times \text{Im}(m) - 3i \times 2\text{Re}(m) = 0$ أي: $\overline{m} - m - 3i(\overline{m} + m) = 0$ وبضرب الطرفين لهذه المعادلة الأخيرة في $\frac{i}{2}$ نجد أن: $\text{Im}(m) + 3\text{Re}(m) = 0$ مع $m \in \mathbb{C}^*$ إذن: (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O, C, M في استقامية هي المستقيم ذو المعادلة: $y = -3x$، ماعدا المبدأ O.
(ن0.25)	ب- تعيين طبيعة (Δ) مجموعة النقط M حتى يكون المثلث OCM قائم في O: (المثلث OCM قائم في O) إذا وفقط إذا $(\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \text{ عدد تخيلي صرف})$ تكافئ أن مجموعة النقط M تنتمي إلى المستقيم: $y = -3x$ (OC) العمودي على المستقيم: $y = \frac{1}{3}x$ (Δ)، ماعدا المبدأ O.
(ن0.25)	ج- تحديد طبيعة المثلث ABC: لدينا: $i = \frac{5i}{5} = \frac{-2+i+4i+2}{4+1} = \frac{-2-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{-1+3i-i}{2+2i-i} = \frac{-1+3i-i}{2+i}$ وهذا يكافئ أن: $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مما يعني أن: $AB = AC$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ معناه أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A.
(ن0.25)	(2) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، والتحاكي H ذو المركز A والنسبة -2: أ- أكتب العبارة المركبة للتحويلين R و H: حيث: $R(z) = z' = a_R z + b_R = e^{\frac{\pi}{2}i} z + b_R = iz + b_R$ ومنه: $b_R = z_A(1 - a_R) = i(1 - i) = i + 1 = 1 + i$ أي: $R(z) = z' = iz + 1 + i$ من جهة أخرى، فإن: $H(z) = z' = a_H z + b_H = -2z + b_H$ ومنه: $b_H = z_A(1 - a_H) = i(1 - (-2)) = i \times 3 = 3i$ أي: $H(z) = z' = -2z + 3i$ ب- تعيين طبيعة التحويل النقطي T المعروف بـ: $T = R \circ H$: لدينا: $T(z) = R \circ H(z) = R[H(z)] = R[-2z + 3i] = i(-2z + 3i) + 1 + i = -2iz - 2 + i + 1 + i = -2iz - 2 + 2i$ أي: $T(z) = -2iz - 2 + 2i$ حيث: $a_H = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ مما يعني أن T عبارة عن تشابه مباشر، نسبته $k = 2$ وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ومركزه A (لأنه A هو مركز التحويلين الدوران والتحاكي).

	ج-اثبات أن النقط A, B, C' في استقامة علماً أن: C' صورة النقطة C بالتحويل T: $T(z_{C'}) = -2iz_C - 2 + i = -2i(-1 + 3i) - 2 + i = 2i + 6 - 2 + i = 4 + 3i$. من جهة أخرى فإن: $\frac{z_{C'} - z_B}{z_{C'} - z_A} = \frac{4+3i-2-2i}{4+3i-i} = \frac{2+i}{4+2i} = \frac{2+i}{2(2+i)} = \frac{1}{2}$ وهذا يعني أن: $\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$ ومنه فإن النقط A, B, C' في استقامة.												
(ن0.25)													
(ن0.25)													
	(4) تعيين (Y) مجموعة النقط M حتى تكون النقط A, B, C, M تنتمي إلى نفس الدائرة: حسب السؤال الأول ج- فإن: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ أي: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف. ومن جهة أخرى: $\frac{z_C - z_M}{z_B - z_M} \times \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عدد حقيقي، وهذا يكافئ أن: $\frac{z_C - z_M}{z_B - z_M}$ تخيلي صرف، مما يعني أن: $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$ وهذا يكافئ أن: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$، إذن: مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. (هي الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC)).												
(ن0.25)													
(ن0.25)													
(نقاط7)	التمرين الرابع: (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$: (1) دراسة تغيرات الدالة g: - مجموعة التعريف: من المعطيات: $]0; +\infty[$. - النهايات: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2$: لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - 2 + \frac{1}{2}\ln x \right] = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + \frac{1}{2}\ln x \right] = +\infty$ - الاشتقاقية: g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$ ، أما إشارتها فهي موجبة تماماً على $]0; +\infty[$ لأن: $2x > 0; x > 0$، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$، إذن: g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$. - جدول تغيرات الدالة g: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	$g'(x)$		+	$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$			
x	0	$+\infty$											
$g'(x)$		+											
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$											
(ن0.25)													
(ن0.25)													
(ن0.25)													
(ن0.25)													
(ن0.25)													
	(2) اثبات أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.7 < \alpha < 1.8$: g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماماً على $]1.7; 1.8[$ كجزء من $]0; +\infty[$، (حسب السؤال الأول). حيث: $g(1.7) \simeq -0.03 < 0$، $g(1.8) \simeq 0.22 > 0$، إذن: $g(1.7) \times g(1.8) < 0$. إذن وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد حل وحيد α في $]1.7; 1.8[$ يُحقق: $g(\alpha) = 0$.												
(ن0.25)													
(ن0.25)													
(ن0.25)	(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$: حسب ما سبق، فإن: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>+</td></tr></table>	x	0	α	$+\infty$	$g(x)$		-	0				+
x	0	α	$+\infty$										
$g(x)$		-	0										
			+										

(II) الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$:

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

(ن0.25)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right] = 0$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{7}{8}x^2 + x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$$

(ن0.25)

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right] = -\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{7}{8}x^2 + x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{4}x^2 \ln x) = -\infty$$

(2) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تمامًا، فإن: $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$:

f معرفة وقابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ كمجموع وجداء دوال قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4}x = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = 1 - 2x + \frac{1}{2}x \ln(\frac{1}{x})$. أي: $f'(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x \ln(\frac{1}{x}) = x(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{x})) = xg(\frac{1}{x})$. وهو المطلوب.

(ن0.25)

(ن0.25)

(ن0.25)

(ن0.25)

• إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تمامًا حيث:

- $x \in]0; \frac{1}{\alpha}]$ ، بمعنى أن: $\frac{1}{x} > \alpha$ ، وحسب الجزء (I) فإن: $g(\frac{1}{x}) > 0$ ، أي: $f'(x) > 0$. وهذا يعني أن: f متزايدة تمامًا على $]0; \frac{1}{\alpha}]$.

- $x \in]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ ، بمعنى أن: $\frac{1}{x} < \alpha$ ، وحسب الجزء (I) فإن: $g(\frac{1}{x}) < 0$ ، أي: $f'(x) < 0$. وهذا يعني أن: f متناقصة تمامًا على $]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$.

(3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			
	0		$-\infty$

(ن0.25)

(1) اثبات أن: $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$:

حسب الجزء (I) فإن: $g(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0$ ، ومنه: $\frac{1}{2} \ln \alpha = 2 - \alpha$ ، أي: $\ln \alpha = 4 - 2\alpha$.

(0.25ن)	وَنَعْلَمُ أَنَّ: $-\ln \alpha = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 2\alpha - 4$، وَبَتَعْوِيضِ هَذِهِ الْأَخِيرَةِ فِي عِبَارَةِ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ نَجِدُ أَنَّ:
(0.25ن)	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \times \frac{8\alpha}{8\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2} (2\alpha - 4) \times \frac{2}{2} = \frac{-7 + 8\alpha - 4\alpha + 8}{8\alpha^2} = \frac{4\alpha + 1}{8\alpha^2}.$
	• <u>استنتاج حصر العدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:</u>
	حسب الجزء (I) فَإِنَّ: $1.7 < \alpha < 1.8$، وَمِنْهُ: $4 \times 1.7 + 1 = 7.8 < 4\alpha + 1 < 4 \times 1.8 + 1 = 8.2$. إِذَنْ: $7.8 < 4\alpha + 1 < 8.2$.
(0.25ن)	مِنْ جِهَةٍ أُخْرَى، فَإِنَّ: $1.7 < \alpha < 1.8$، إِذَنْ: $8 \times 1.7^2 = 23.12 < 8\alpha^2 < 8 \times 1.8^2 = 25.92$.
(0.25ن)	وَعَلَيْهِ نَجِدُ: $\frac{7.8}{25.92} < \frac{4\alpha+1}{8\alpha^2} < \frac{8.2}{23.12}$. أَيْ: $0.3 < f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 0.35$.
(0.25ن)	(2) <u>حساب $f(3) \simeq -7.35$:</u> • <u>رسم البيان (C_f) على المجال $[0; 3]$:</u>
(0.5ن)	
(0.25ن)	

	III) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 \ln x$ (1) باستعمال المكاملة بالتجزئة، حساب بدلالة λ التكامل $\int_2^\lambda h(x) dx$، حيث: $\lambda > 2$: لدينا: $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}$، إذن: $\int_2^\lambda h(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_2^\lambda - \frac{1}{3} \int_2^\lambda x^2 dx$ ومنه: $\int_2^\lambda h(x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} \left(\frac{1}{3} - \ln x \right) \right]_2^\lambda = -\frac{\lambda^3}{3} \left(\frac{1}{3} - \ln \lambda \right) + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{3} - \ln 2 \right)$ و عليه فإن: $\int_2^\lambda h(x) dx = \frac{8}{9} - \frac{\lambda^3}{9} - \frac{8}{3} \ln 2 + \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda$
(ن0.25)	
(ن0.25)	
	(2) استنتاج مساحة الحيز بدلالة λ للمستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين: $x = \lambda$ و $x = 2$: بما أن البيان (C_f) يقع تحت محور الفواصل من أجل $2 < x < \lambda$، حيث: $\lambda > 2$، فإن: $I = -\ \vec{i}\ \times \ \vec{j}\ \times \int_2^\lambda f(x) dx = -4 \int_2^\lambda \left[-\frac{7}{8} x^2 + x - \frac{1}{4} h(x) \right] dx$ وحسب السؤال الأول، فإن: $I = -4 \left[-\frac{7}{8} \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{36} - \frac{x^3}{12} \ln x \right]_2^\lambda = -4 \left[-\frac{19x^3}{72} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \ln x \right]_2^\lambda$ أي: $I = -4 \left[-\frac{19\lambda^3}{72} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{12} \ln \lambda + \frac{19}{9} - 2 + \frac{2}{3} \ln 2 \right]$ $= -4 \left[-\frac{19\lambda^3}{72} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{12} \ln \lambda + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \ln 2 \right]$ إذن: $I = \left(\frac{19\lambda^3}{18} - 2\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{4}{9} - \frac{8}{3} \ln 2 \right) cm^2$
(ن0.25)	
(ن0.25)	

العلامة	الموضوع الثاني - التصحيح المفصل -																																																															
(نقاط 4)	التمرين الأول: D_1 و D_2 زهرتي نرد، النرد D_1 مغشوش وله كل وجهين يحملان نفس الرقم k حيث: $k \in \{1; 2; 3\}$. نرمز بـ u_k احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k. (1) حساب u_1, u_2, u_3 علماً أن هذه الأعداد تُشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$: بما أن u_1, u_2, u_3 عبارة عن حدود متتابعة لمتتالية حسابية، فإن: u_2 هو الوسط الحسابي. من جهة أخرى فإن: $u_1 + u_2 + u_3 = 3$، وعليه لدينا الجملة: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \end{cases}$ فينتج: $3u_2 = 1$، ومنه: $u_2 = \frac{1}{3}$. ومن جهة أخرى وبما أن الأساس هو $r = \frac{1}{4}$، وبما أن: $u_1 = u_2 - r = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$. إذن: $u_1 = \frac{1}{12}$. ويكون: $u_1 = u_2 + r = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. إذن: $u_2 = \frac{7}{12}$.																																																															
(ن0.25) (ن0.25) (ن0.25)																																																																
(ن0.25)	(2) النرد D_2 ليس مغشوش وله كل ثلاث وجوه تحمل نفس الرقم p حيث: $p \in \{1; 2\}$. نرمز بـ v_p احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم p. • حساب v_1 و v_2: بما أن النرد D_2 ليس مغشوش، فنحن في حالة تساوي الاحتمالات وعليه فإن: إذن: $v_1 = v_2 = \frac{\text{card}\{1;1;1\}}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{card}\{1;1;1\}}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.																																																															
(ن0.25)																																																																
(ن0.25)	(3) نرمي النردين D_1 و D_2 في آن واحد، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يُساوي جداء رقمي الوجهين العلويين للنردين D_1 و D_2 بعد السقوط. أ- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X: نُوضّح في الجدول أدناه النتائج: <table> <tr> <th>$D_2 \backslash D_1$</th><th>1</th><th>1</th><th>2</th><th>2</th><th>3</th><th>3</th></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr> </table> وعليه فإن قيم المتغير العشوائي X: $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 6\}$. أما قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X: <table> <tr> <th>X_i</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>6</th><th>$\sum p_i$</th></tr> <tr> <td>P_i</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{12}{36}$</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{36}{36} = 1$</td></tr> </table>	$D_2 \backslash D_1$	1	1	2	2	3	3	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	2	2	3	3	2	2	2	4	4	6	6	2	2	2	4	4	6	6	2	2	2	4	4	6	6	X_i	1	2	3	4	6	$\sum p_i$	P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$
$D_2 \backslash D_1$	1	1	2	2	3	3																																																										
1	1	1	2	2	3	3																																																										
1	1	1	2	2	3	3																																																										
1	1	1	2	2	3	3																																																										
2	2	2	4	4	6	6																																																										
2	2	2	4	4	6	6																																																										
2	2	2	4	4	6	6																																																										
X_i	1	2	3	4	6	$\sum p_i$																																																										
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$																																																										
(ن0.25) (ن1.5)																																																																
(ن0.25)	ب- حساب $\sigma(2024 - 1445X)$: نعلم أن: الإنحراف المعياري مُعطى بالعلاقة: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$، و $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.																																																															

الجدول أدناه يُساعدنا، حيث:

X_i	1	2	3	4	6	$\sum$
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$
$X_i \times P_i$	$\frac{6}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{108}{36} = 3$
X_i^2	1	4	9	16	36	
$X_i^2 \times P_i$	$\frac{6}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{54}{36}$	$\frac{96}{36}$	$\frac{216}{36}$	$\frac{420}{36} = \frac{35}{3}$

(ن0.25)

$$.V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum X_i^2 \times P_i - [\sum X_i \times P_i]^2 = \frac{35}{3} - 3 = \frac{8}{3}$$

(ن0.25)

$$. \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(ن0.25)

$$\begin{cases} \sigma(X+b) = \sigma(X) \\ \sigma(aX) = |a|\sigma(X) \end{cases}$$

(ن0.25)

$$. \sigma(2024 - 1445X) = \sigma(-1445X) = |-1445|\sigma(X)$$

(ن0.25)

$$. \sigma(2024 - 1445X) = 1445 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2809\sqrt{6}}{3}$$

(نقاط4)

التمرين الثاني: لتكن (t_n) متتالية هندسية متزايدة تمامًا معرفة على N كما يلي:

$$\begin{cases} t_0 + t_1 + t_2 = 7\ln 2 \dots\dots (1) \\ t_0 \times t_1 \times t_2 = 8(\ln 2)^3 \dots\dots (2) \end{cases}$$

حساب الحدود t_1 ثم t_0 و t_2 :

بما أن (t_n) هندسية، والحدود t_0, t_1, t_2 متتابعة منها، فإن: t_1 هو الوسط الهندسي الذي يُحقق:

$$t_1^2 = t_0 \times t_2 \quad \text{وَمِنْهُ، وَبِالتَّعْوِيزِ فِي (2) نَجِدُ: } t_1^3 = 8(\ln 2)^3 = (2\ln 2)^3$$

(ن0.25)

$$. \quad t_1 = 2\ln 2 = \ln 4$$

وَهَذَا يُكَافِئُ أَنْ: $t_1 = 2\ln 2 = \ln 4$ من جهة أخرى، وَبِتعويض t_1 بـ $2\ln 2$ في كل من (1) و (2)، نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} t_0 + t_2 = 7\ln 2 - 2\ln 2 = 5\ln 2 \dots\dots (1) \\ t_0 \times t_2 = (2\ln 2)^2 = 4(\ln 2)^2 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

وَتَوَوَّلْ حُلْ هَذِهِ الْجُمْلَةِ إِلَى حُلِّ الْمَعَادِلَةِ: $x^2 - Sx + P = 0$ ، حيث: $S = 5\ln 2$ و $P = 4(\ln 2)^2$.

$$\text{أَي: } 0 = x^2 - x(5\ln 2) + 4(\ln 2)^2 \quad ، \quad \text{لنحسب المميز } \Delta = (5\ln 2)^2 - 4 \times 1 \times 4(\ln 2)^2$$

$$\Delta = 25(\ln 2)^2 - 16(\ln 2)^2 = 9(\ln 2)^2 = (3\ln 2)^2 > 0 \quad \text{وَمِنْهُ فَإِنَّ:}$$

(ن0.25)

$$\begin{cases} x' = \frac{5\ln 2 - 3\ln 2}{2} = \ln 2 \\ x' = \frac{5\ln 2 + 3\ln 2}{2} = 4\ln 2 \end{cases}$$

(ن0.25)

وَعَلَيْهِ إِذَا: $(t_0; t_1; t_2) = (4\ln 2; 2\ln 2; \ln 2)$ ، مرفوض، لأن: المتتالية (t_n) متزايدة تمامًا.

(ن0.25)

أو $(t_0; t_1; t_2) = (\ln 2; 2\ln 2; 4\ln 2)$ ، مقبول، لأن: المتتالية (t_n) متزايدة تمامًا.

(ن0.25)

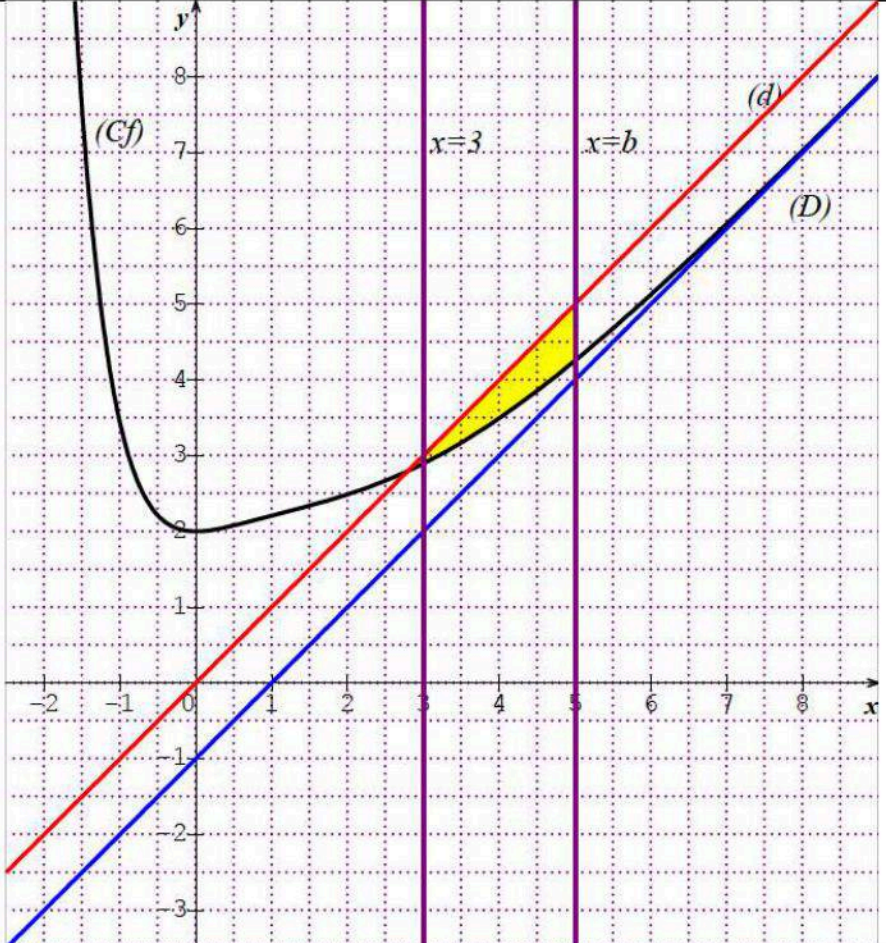
(0.25ن) (0.25ن)	(2) استنتاج الأساس q للمتتالية (t_n): حسب السؤال الأول، فإن: $q = \frac{t_1}{t_0} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$ ، أي: $q = 2$. • أكتب t_n بدلالة n: بما أن المتتالية (t_n) هندسية، فمن عبارة الحد العام: $t_n = t_0 \times q^n = 2^n(\ln 2); \forall n \in \mathbb{N}$
(0.25ن) (0.25ن)	(3) إيجاد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق: $t_n > \ln 2^{2974}$: $t_n \geq \ln 2^{2974}$ تكافئ -حسب خواص اللوغاريتم النيبيري- وحسب السؤال الثاني فإن: $2^n(\ln 2) \geq \ln 2^{2974} = 2974(\ln 2)$ ، وهذا يعني أن: $2^n \geq 2974$ ، أي وبتطبيق خواص اللوغاريتم النيبيري: $n \ln 2 \geq \ln 2974$ ، إذن: $n \geq \frac{\ln 2974}{\ln 2} \simeq 11.53$ ، ومنه قيمة $n = 12$.
(0.25ن) (0.25ن) (0.25ن)	(4) أ- حساب المجموع S_n بدلالة t_n: $S_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$: بما أن المتتالية (t_n) هندسية فإن: $S_n = t_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \ln 2 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$. إذن: $S_n = (2^{n+1} - 1)\ln 2; \forall n \in \mathbb{N}$. • حساب الجداء P_n بدلالة t_n: $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$: لدينا: $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n = 2^0(\ln 2) \times 2^1(\ln 2) \times \dots \times 2^n(\ln 2)$. وحسب قواعد القوى، فإن: $P_n = 2^{(0+1+\dots+n)}(\ln 2)^{n+1} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\ln 2)^{n+1}$. ملاحظة: نلاحظ أن: حيث: $u_n = n$ و $u_{n+1} = n+1$ من الشكل: $u_{n+1} = n+r$ ، مما يعني أن المتتالية (u_n) حسابية وأساسها $r = 1$ ، إذن: $0 + 1 + 2 + \dots + n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n-0+1}{2} \times (u_0 + u_n)$ $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n+1}{2} \times (0 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$
(0.25ن)	ب- استنتاج S'_n بدلالة n حيث: $S'_n = \ln(t_0) + \ln(t_1) + \dots + \ln(t_n)$: لدينا وحسب خواص اللوغاريتم النيبيري: $S'_n = \ln(t_0) + \ln(t_1) + \dots + \ln(t_n) = \ln(t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n) = \ln P_n$ ومنه، وحسب السؤال أ- فإن: $S'_n = \ln \left[2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\ln 2)^{n+1} \right]$
(0.25ن) (0.25ن) (0.25ن)	ج- حساب S''_n بدلالة n حيث: $S''_n = t_0^{2024} + t_1^{2024} + \dots + t_n^{2024}$: لدينا: $S''_n = t_0^{2024} + t_1^{2024} + \dots + t_n^{2024} = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. حيث: $v_n = t_n^{2024} = [2^n(\ln 2)]^{2024} = 2^{2024n}(\ln 2)^{2024}$. نلاحظ أن: $v_{n+1} = 2^{2024(n+1)}(\ln 2)^{2024} = v_n \times 2^{2024}$ ، مما يعني أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q' = 2^{2024}$ وحدها الأول: $v_0 = (\ln 2)^{2024}$ ، ومنه: $S''_n = v_0 \times \frac{q'^{n+1}-1}{q'-1} = (\ln 2)^{2024} \left[\frac{2^{2024(n+1)}-1}{2^{2024}-1} \right]$
(5نقاط) (0.25ن) (0.25ن)	التمرين الثالث: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$، نعتبر النقاط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A = -1 + \sqrt{3}i$، $Z_B = \bar{Z}_A$ و $Z_C = 2$. (1) أ- كتابة العدد المركب: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الأسّي: نضع: $Z = \frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ ، ومنه: $Z = \frac{-1 - \sqrt{3}i - 2}{-1 + \sqrt{3}i - 2} = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)}{-\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \times \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{3 + 2\sqrt{3}i - 1}{3 + 1}$. إذن: $Z = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. حيث: $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

(ن0.25)	وَلتكن: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \arg(Z) = \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه: $\arg(Z) = \theta$
(ن0.25)	إذن: $Z = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$ ، أي: $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$
(ن0.25)	ب- استنتاج طبيعة المثلث ABC: حسب السؤال أ- فإن: $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، وهذا يكافئ أن:
(ن0.25)	$\begin{cases} BC = AC \\ (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ ومنه فإن: $\begin{cases} \left \frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} \right = 1 \\ \arg\left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$
(ن0.25)	وهذا يعني أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
(ن0.25)	ج- تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (Y) المحيطة بالمثلث ABC:
(ن0.25)	نلاحظ أن: $ Z_A = \sqrt{1+3} = 2 = Z_B = Z_C $ ، وهذا يكافئ أن: $OA = OB = OC = 2$.
(ن0.25)	إذن: النقط A، B، C تنتمي إلى نفس الدائرة (Y) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها 2.
(ن0.25)	2) أ- تعيين طبيعة وعناصر المجموعة (Γ) للنقط M(Z) التي تحقق: $Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$:
(ن0.25)	بوضع: $\begin{cases} Z = x + iy \\ \bar{Z} = x - iy \end{cases}$ مع x و y عدنان حقيقيان، يكون إذن: $Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$ ، أي:
(ن0.25)	$(x + iy)(x - iy) + 2(x + iy + x - iy) = x^2 + y^2 + 2x$
(ن0.25)	من الشكل: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ ، إذن: (Γ) عبارة عن دائرة مركزها $\Omega(-2; 0)$ ونصف القطر 2.
(ن0.25)	ب- التحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ): لدينا:
(ن0.25)	$\begin{cases} \Omega A = Z_A - Z_\Omega = -1 + \sqrt{3}i - (-2) = 1 + \sqrt{3}i = 2 \\ \Omega B = Z_B - Z_\Omega = -1 - \sqrt{3}i - (-2) = -1 + \sqrt{3}i = 2 \end{cases}$
(ن0.25)	وهذا يعني أن: A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ).
(ن0.25)	3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
(ن0.25)	أ- تعيين صورة النقطة B بالدوران r:
(ن0.25)	لدينا: $\begin{cases} r(B) = B' \\ r(A) = A \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} Z_{B'} = aZ_B + b \\ Z_A = aZ_A + b \end{cases}$ ، فينتج: $a = \frac{Z_{B'} - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$
(ن0.25)	إذن: $Z_{B'} = Z_A + a(Z_B - Z_A)$ ، ومنه: $Z_{B'} - Z_A = a(Z_B - Z_A)$
(ن0.25)	أي: $Z_{B'} = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(-1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i)$
(ن0.25)	ومنه: $Z_{B'} = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)(-2\sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i + 3 = 2$
(ن0.25)	إذن: $Z_{B'} = Z_C = 2$.
(ن0.25)	ب- تعيين صورة النقطة D لاحقاً النقطة C بالدوران r:
(ن0.25)	لدينا: $r(C) = D$ ، وحسب السؤال أ- فإن: $Z_D = Z_A + a(Z_C - Z_A)$ ، ومنه:
(ن0.25)	$Z_D = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i + \frac{(1+i\sqrt{3})(3-\sqrt{3}i)}{2}$
(ن0.25)	أي: $Z_D = -1 + \sqrt{3}i + \frac{3+3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3}{2} = -1 + \sqrt{3}i + 3 + \sqrt{3}i$
(ن0.25)	إذن: $Z_D = 2 + 2\sqrt{3}i$.
(ن0.25)	ج- استنتاج طبيعة الرباعي ABCD:

(ن0.25)	لدينا: $\vec{BA} = \vec{CD}$ أي: $\begin{cases} Z_{\vec{CD}} = Z_D - Z_C = 2 + 2\sqrt{3}i - 2 = 2\sqrt{3}i \\ Z_{\vec{BA}} = Z_A - Z_B = -1 + \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i \end{cases}$ ومنه: الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع. ومن جهة أخرى فإن: $r(B) = C$ و $r(C) = D$، معناه أن: $BC = CD$. إذن: متوازي الأضلاع $ABCD$ معين.												
(ن0.25)	دلتعين صورة النقطة Ω بالدوران r: حسب السؤال 2-أ. فإن: $\Omega(-2; 0)$ وهذا يكافئ أن: $Z_{\Omega} = -2$. لدينا: $r(\Omega) = \Omega'$، وحسب السؤال 1-أ. فإن: $Z_{\Omega'} = Z_A + a(Z_{\Omega} - Z_A)$، ومنه: $Z_{\Omega'} = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(-2 + 1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i + \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-\sqrt{3}i)}{2}$ أي: $Z_{\Omega'} = -1 + \sqrt{3}i + \frac{-1-2\sqrt{3}i+3}{2} = -1 + \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i = 0$ إذن: $Z_{\Omega'} = 0$، أي: $r(\Omega) = O$.												
(ن0.25)	استنتاج صورة المجموعة (Γ) بالدوران r: لدينا: $\begin{cases} r(B) = C \\ r(\Omega) = O \end{cases}$، معناه أن: صورة الدائرة (Γ) بالدوران r هي الدائرة (Y).												
(نقاط7)	التمرين الرابع: I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$: 1 دراسة تغيرات الدالة g: مجموعة التعريف: من المعطيات: $D_g = \mathbb{R}$ النهايات: (ن0.25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - (x^2 + 1)e^{-x}] = -\infty$ (ن0.25) لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} -(x^2 + 1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = +\infty$ (ن0.25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - (x^2 + 1)e^{-x}] = 1$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$ الاشتقاقية: g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = -2xe^{-x} + (x^2 + 1)e^{-x} = (-2x + x^2 + 1)e^{-x} = (x - 1)^2 e^{-x}$ (ن0.25) أما إشارتها فهي موجبة تماماً على $\mathbb{R}$ لأن: $(x - 1)^2 > 0$؛ $e^{-x} > 0$، من أجل كل عدد حقيقي x، (ن0.25) إذن: g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$. جدول تغيرات الدالة g: <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td></td> <td>1</td> </tr> </table> (ن0.25) $g(1) = 1 - 2e^{-1}$	x	$-\infty$	1	$+\infty$	$g'(x)$	+	0	+	$g(x)$	$-\infty$		1
x	$-\infty$	1	$+\infty$										
$g'(x)$	+	0	+										
$g(x)$	$-\infty$		1										
(ن0.25)	2 حساب $g(0)$: $g(0) = 1 - 1 = 0$												

(ن0.25)	استنتاج إشارة $g(x)$: حسب ما سبق، فإن: <table border="1" data-bbox="542 98 1324 217"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$-$</td> <td>0</td> <td>$+$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g(x)$	$-$	0	$+$
x	$-\infty$	0	$+\infty$						
$g(x)$	$-$	0	$+$						
(ن0.25)	(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$: أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}] = +\infty.$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$								
(ن0.25)	ب- التحقق أن المستقيم $y = x - 1$ (D) مستقيم مقارب مائل للبيان (C_f) عند $(+\infty)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 2x + 3)e^{-x}] = 0.$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$ ومنه: المستقيم $y = x - 1$ (D) مستقيم مقارب مائل للبيان (C_f) عند $(+\infty)$.								
(ن0.25)	جدراسة الوضعية النسبية: أي ندرس إشارة: $f(x) - y$، حيث: $f(x) - y = f(x) - (x - 1) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x} > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ لأن: $(\Delta = 4 - 12 = -9 < 0)$، $(x^2 + 2x + 3) > 0$، و $e^{-x} > 0$، من أجل كل عدد حقيقي. إذن: $f(x) - (x - 1) > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. أي: البيان (C_f) يقع فوق المقارب المائل (D).								
(ن0.25)	(2) أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$: لدينا: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x} = x - 1 + \frac{x^2 + 2x + 3}{e^x}$. إذن: $f(x) = \frac{(x-1)e^x + x^2 + 2x + 3}{e^x} = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$.								
(ن0.25)	ب- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: حسب السؤال أ- فإن: $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x} = +\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$								
	(3) أكتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f: f معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع وجداء دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، ودالتها المشتقة:								

(ن0.25)	$f'(x) = 1 + (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ $f'(x) = 1 + (-x^2 - 1)e^{-x} = 1 - (x^2 + 1)e^{-x} = g(x) \text{ أي:}$												
(ن0.25)	ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f: حسب السؤال أ- فإن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ وحسب الجزء I فإن: $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; 0[$، ومنه: f متناقصة تمامًا على $]-\infty; 0[$. $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$، ومنه: f متزايدة تمامًا على $]0; +\infty[$.												
(ن0.25)	• تشكيل جدول تغيرات الدالة f: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$f(0)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> مع: $f(0) = -1 + 3 = 2$	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	0	$+$	$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$										
$f'(x)$	$-$	0	$+$										
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$										
(ن0.25)	4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) - x$، والمستقيم $(d): y = x$. أ- اثبات أن المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلًا واحدًا α حيث: $2 < \alpha < 3$. h معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1 = -(x^2 + 1)e^{-x} < 0; \forall x \in \mathbb{R}$ وعليه، فإن: h متناقصة تمامًا على $]2; 3[$ كجزء من $\mathbb{R}$ حيث: $\begin{cases} h(2) \simeq 0.48 > 0 \\ h(3) \simeq -0.11 < 0 \end{cases}$ فينتج: $h(2) \times h(3) < 0$، إذن: وحسب مبرهنة القيم المتوسطة، فإنه يوجد حل وحيد $\alpha \in]2; 3[$ يحقق: $h(\alpha) = 0$.												
(ن0.25)	ب-استنتاج الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d): لدينا: $h(x) = f(x) - x$، ومن دراسة إشارتها تساعدنا على معرفة الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d) وحسب السؤال أ- فإن: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table> أي أن: (C_f) يقع أعلى (d) لما $x \in]-\infty; \alpha[$، ويقع أسفل (d) لما $x \in]\alpha; +\infty[$. و: $(C_f) \cap (d) = \{(\alpha; 0)\}$	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$h(x)$	$+$	0	$-$				
x	$-\infty$	α	$+\infty$										
$h(x)$	$+$	0	$-$										
	(5) حساب $f(-\frac{3}{2})$: $f(-\frac{3}{2}) \simeq 7.58$. • رسم المستقيمين (D)، (d) والبيان (C_f) على $]-\frac{3}{2}; +\infty[$:												

(0.25ن) (0.25ن)	
(0.25ن)	6) أ- يَبَيِّنْ أَنَّ الدالة: $x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة: $x \mapsto -x^2e^{-x}$ الدالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق، حيث: $(2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x} = (2x + 2 - x^2 - 2x - 2)e^{-x} = -x^2e^{-x}$ وهو المطلوب.
(0.25ن)	ب- باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب بدلالة العدد الحقيقي x، التكامل: $\int xe^{-x}dx$ لدينا: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ إذن: $I = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$ أي: $I = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$
(0.25ن) (0.25ن) (0.25ن)	ج- حساب بدلالة β، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذوو المعادلتين: $x = \beta$ و $x = 3$، حيث: $\beta > 4$ بما أن البيان (C_f) يقع أسفل المستقيم (d) على المجال $]3; +\infty[$، فإن: $\mathcal{A}(\beta) = \ \vec{t} \ \times \ \vec{j} \ \int_3^\beta [x - f(x)]dx$ أي: $\mathcal{A}(\beta) = 1 \times 1 \int_3^\beta (x - x + 1 - x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 3e^{-x})dx$، ومنه: $\mathcal{A}(\beta) = \int_3^\beta (-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 3e^{-x} + 1)dx$، وحسب ب- و-ج- فإن: $\mathcal{A}(\beta) = [(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + 2(x+1)e^{-x} + 3e^{-x} + x]_3^\beta$، أي: $\mathcal{A}(\beta) = [(x^2 + 4x + 7)e^{-x} + x]_3^\beta$، فينتج: $\mathcal{A}(\beta) = [(\beta^2 + 4\beta + 7)e^{-\beta} + \beta - 28e^{-3} - 3](cm^2)$