



التمرين الأول: (05 نقاط) – المعادلات التفاضلية

لتكن المعادلة التفاضلية (E) حيث:

$$(E) \dots \frac{dy}{dx} - 2y(x) = 2x + 1$$

ولتكن z دالة أخرى معرفة بالعلاقة: $y(x) = z(x) + ax + b$ ، أين a و b هما عدنان حقيقيان، و a غير معدوم.

(1) أ/ تحقق أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + a$ ، ثم بين أن الدالة z تحقق المعادلة (E') حيث:

$$(E') \dots \frac{dz}{dx} - 2z(x) = (2a + 2)x + (1 + 2b - a)$$

ب/ عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون المعادلة (E') معطاة كما يلي:

$$(E') \dots \frac{dz}{dx} - 2z(x) = 0$$

ج/ عين الدوال z حلول المعادلة (E')

(2) استنتج عبارة الدالة y حل المعادلة التفاضلية (E).

(3) عين الحل الخاص للمعادلة (E) حيث: $y(0) = 0$.

التمرين الثاني: (05 نقاط) – حل معادلات ومتراجحات تتضمن الدالة الأسية واللوغاريتمية

اختر لكل عبارة مما يلي الجواب الصحيح الوحيد مما يلي مع التبرير:

ملاحظة: لا نقبل كتبرير استخدام مبدأ الإقصاء يجب حل المعادلات والوصول إلى أحد الأجوبة.

(1) مجموعة حلول المتراجحة $5e^x < 6 + e^{2x}$ في $\mathbb{R}$ هي:

ج3 $S =]-\infty; \ln(2)[\cup]\ln(3); +\infty[$

ج2 $S =]2; 3[$

ج1 $S =]\ln(2); \ln(3)[$

(2) لتكن جملة المعادلتين $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$. باعتبار $x < y$ فإن الثنائية $(x; y)$ التي تحل الجملة هي:

ج3 $x = \ln(3); y = 0$

ج2 $x = 0; y = \ln(3)$

ج1 $x = 1; y = 3$

(3) مجموعة حلول المعادلة $\ln(\ln(\ln(x))) = 0$ في $\mathbb{R}$ هي:

(1) $x = 1$ ج2 $x = e$ ج3 $x = e^e$

(4) لتكن جملة المعادلتين $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y^2) = -1 \\ \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y^2}\right) = 5 \end{cases}$ الثنائية $(x; y)$ التي تحل الجملة هي:

(1) $x = 2; y = -\frac{3}{2}$ ج2 $x = e^2; y = \sqrt{\frac{1}{e^3}}$ ج3 $\emptyset$

التمرين الثالث: (10 نقاط)

الجزء الأول: – الدوال العددية – دراسة دالة مثلثية

لتكن الدالة g المعرفة على $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ بالعلاقة: $g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(1) احسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow < -\frac{\pi}{2}} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow > -\frac{\pi}{2}} g(x)$. فسر النتيجة هندسيا.

(2) بين أن من أجل كل x من D فإن: $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. استنتج تغيرات الدالة g على المجال D .

تذكير: من أجل كل عدد حقيقي x فإن $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

- احسب $g(0)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

الجزء الثاني: – تركيب دالة مع الدالة الأسية – الاشتقاقية والاستمرارية

نعتبر الآن الدالة f المعرفة على المجال $D' = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ بالعلاقة: $f(x) = \begin{cases} e^{\tan(x)} ; x \in D \\ 0 ; x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ والممثلة على معلم

متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ بالمنحنى (C) . (نأخذ على محور الفواصل: $lcm \rightarrow \pi/6$ ، وعلى محور الترتيب: $lcm \rightarrow 0.5$).

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow < -\frac{\pi}{2}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow > -\frac{\pi}{2}} f(x)$ ، ماذا تستنتج حول استمرارية f من أجل $x = -\frac{\pi}{2}$ ؟

(3) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال D ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عين معادلة المستقيم (T) المماسي للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) نقبل أن المنحنى (C) فوق المستقيم (T) من أجل كل x من D' .

أنشئ كل من المستقيمتان المقاربة، المستقيم (T) والمنحنى (C) .

(6) نعتبر المعادلة التالية المتعلقة بالوسيط الحقيقي m كما يلي:

$$(E) \dots \tan(x) + \ln\left(\frac{1}{x+m}\right) = 0$$

أ/ بين أن حلول المعادلة (E) تؤول إلى حل المعادلة $f(x) = x + m$.

ب/ ناقش بيانيا حلول المعادلة (E) .

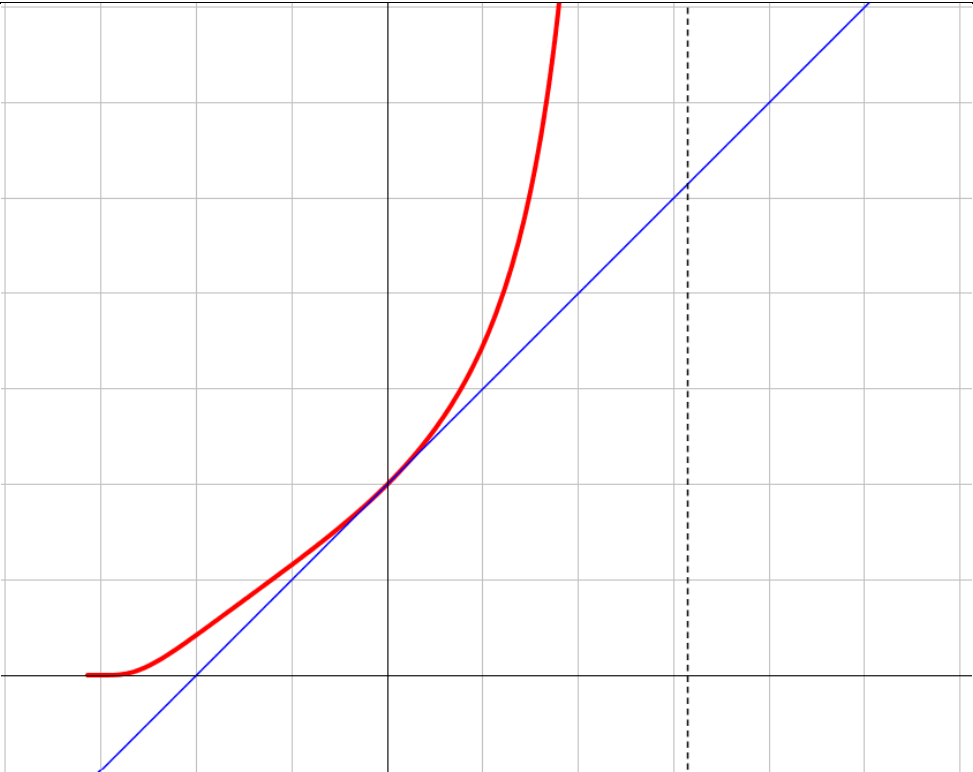
انتهى الموضوع – بالتوفيق

التصحيح النموذجي لفرض الثلاثي الأول لمادة الرياضيات - سنة ثالثة رياضيات / تقني رياضي

العلامة		عناصر الإجابة	السؤال
كلية	مجزأة		
التمرين الأول (05 نقاط)			
1.5	0.5	أ/ التحقق: لدينا: $y = z + ax + b$، وعليه فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{d[z + ax + b]}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{d(ax + b)}{dx} = \frac{dz}{dx} + a$ تبيين أن الدالة z تحقق المعادلة (E'): نعوض في المعادلة (E) قيمتي dy/dx و y بما يقابلها بدلالة z فنجد:	(1)
	0.5	$\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{dz}{dx} + a - 2(z + ax + b) = \frac{dz}{dx} + a - 2z - 2ax - 2b$ $= \frac{dz}{dx} - 2z - (2ax - a + 2b) = 2x + 1$	
	0.5	$\frac{dz}{dx} - 2z = 2x + 1 + 2ax - a + 2b$ $\frac{dz}{dx} - 2z = (2a + 2)x + (1 + 2b - a)$ وهي ذات المعادلة (E') المطلوبة.	
1	2×0.5	ب/ تعيين قيم a و b: المطلوب هو تعيين قيمتي a و b حتى يكون لدينا: $(2a + 2)x + (1 + 2b - a) = 0$ أي: $\begin{cases} 2a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \\ 1 + 2b - a = 0 \Leftrightarrow b = -1 \end{cases}$	
0.75	0.75	ج/ تعيين الحلول z للمعادلة (E'): المعادلة التفاضلية (E') من الشكل: $z' = 2z$، وعليه فإن حلها العام يعطى بـ: $z(x) = Ce^{2x}$ حيث C هو ثابت حقيقي غير معدوم.	
0.75	0.75	استنتاج العبارة العامة للدوال y حلول المعادلة (E): بما أن المعادلتين التفاضليتين (E) و (E') متكافئتان فإنه إذا كانت z حلاً لـ (E') فإن الدالة y المعرفة بـ: $y = z + ax + b$ هي حل لـ (E). إذن عبارة y هي:	(2)
	0.75	$y(x) = z(x) - x - 1 = Ce^{2x} - x - 1$	
1	0.5	تعيين الحل الخاص حيث $y(0)=0$: لدينا:	(3)
	0.5	$y(0) = C - 1 = 0 \Leftrightarrow C = 1$ إذن الحل الخاص هو: $y(x) = e^{2x} - x - 1$	
التمرين الثاني (05 نقاط)			
1.25	0.25	نضع $t = e^x$ إذن المترابطة $6 + e^{2x} < 5e^x$ تكافئ: $t^2 - 5t + 6 < 0$ ولدينا: $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 > 0$ إذن جذور كثير الحدود $t^2 - 5t + 6$ هي:	(1)
	0.25	$t_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad ; \quad t_2 = \frac{5+1}{2} = 3$ إذن: $t^2 - 5t + 6 = (t - 3)(t - 2) \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 = (e^x - 3)(e^x - 2)$	

		وعليه ينتج لدين جدول الإشارة التالي:																							
	0.5	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\ln(2)$</td><td>$\ln(3)$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$e^x - 3$</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$e^x - 2$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$e^{2x} - 5e^x + 6$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td></tr></table>	x	$-\infty$	$\ln(2)$	$\ln(3)$	$+\infty$	$e^x - 3$	-	-	0	+	$e^x - 2$	-	0	+	+	$e^{2x} - 5e^x + 6$	+	0	-	0			
x	$-\infty$	$\ln(2)$	$\ln(3)$	$+\infty$																					
$e^x - 3$	-	-	0	+																					
$e^x - 2$	-	0	+	+																					
$e^{2x} - 5e^x + 6$	+	0	-	0																					
	0.25	وعليه فإن مجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي (ج1): $S =]\ln(2); \ln(3)[$																							
1.25	0.25	نضع $X = e^x$ و $Y = e^y$ ، وبما أن $x < y$ فإنه ينتج أن $X < Y$. إذن الجملة المعطاة تكافئ: $\begin{cases} XY = 3 \\ X + Y = 4 \end{cases}$ ، إذن العددين X و Y هما حلان للمعادلة: $t^2 - 4t + 3 = 0$ لدينا: $\Delta = 4^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$ وعليه فإن المعادلة تقبل حلان هما: $X = e^x = \frac{4-2}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$ $Y = e^y = \frac{4+2}{2} = 3 \Leftrightarrow y = \ln(3)$ وعليه فإن الجواب الصحيح هو (ج2): $x = 0; y = \ln(3)$.				(2)																			
	0.25																								
	0.25																								
	0.25																								
1.25	1	حل المعادلة: $\ln(\ln(\ln(x))) = 0 \Leftrightarrow \ln(\ln(x)) = e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = e \Leftrightarrow x = e^e$ وعليه فإن الجواب الصحيح هو (ج3)				(3)																			
	0.25																								
1.25	0.25	الجملة المعطاة تكافئ: $\begin{cases} \ln(x) + 2\ln(y) = -1 \\ \ln(x) - 2\ln(y) = 5 \end{cases}$ باختيار $X = \ln(x)$ و $Y = \ln(y)$ فإننا نحصل على جملة مكافئة: $\begin{cases} X + 2Y = -1 \\ X - 2Y = 5 \end{cases}$ بحل الجملة نجد: $X = \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ $Y = \ln(y) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow y = e^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{e^3}}$ وعليه فإن الجواب الصحيح هو (ج2)				(4)																			
	0.25																								
	0.25																								
	0.25																								
التمرين الثالث (10 نقاط)																									
		الدالة g المعرفة على $D =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ بالعلاقة: $g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.				الجزء الأول																			
1	0.25	حساب نهايات الدالة g عند أطراف المجال D : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$ التفسير الهندسي: منحنى الدالة g يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور الترتيب معادلتيهما هما: $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = -\frac{\pi}{2}$.				(1)																			
	0.25																								
	0.5																								
1	0.5	حساب مشتقة الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق من أجل كل عدد x من المجال D حيث: $g'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$ $= \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$				(2)																			

	0.5	مشتقة الدالة g موجبة تماما من أجل كل x من D وعليه فإن الدالة g متزايدة تماما على D . حساب $g(0)$:													
	0.25	$g(0) = \tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$													
0.75	0.5	جدول تغيرات الدالة g : <table><tr><td>x</td><td>$-\pi/2$</td><td>0</td><td>$+\pi/2$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>θ</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$	$g'(x)$		$+$		$g(x)$	$-\infty$	θ	$+\infty$	
x	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$												
$g'(x)$		$+$													
$g(x)$	$-\infty$	θ	$+\infty$												
		نعتبر الآن الدالة f المعرفة على المجال $D' = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بالعلاقة: $f(x) = \begin{cases} e^{\tan(x)} ; x \in D \\ 0 ; x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ والممثلة على معلم متعامد متجانس $(0; \bar{t}; \bar{j})$ بالمنحنى (C).	الجزء الثاني												
0.75	0.5	حساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow < \frac{\pi}{2}} f(x)$ نستعمل تغيير المتغير: $t = \tan(x)$ ، إذن: $\lim_{x \rightarrow < \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t$ وعليه فإنه حسب خاصية نهاية مركب دالتين ينتج أن: $\lim_{x \rightarrow < \frac{\pi}{2}} e^{\tan(x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$ التفسير الهندسي: المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب معادلته $x = \pi/2$.	(1)												
1	0.5	حساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow > -\frac{\pi}{2}} f(x)$ نستعمل تغيير المتغير: $t = \tan(x)$ ، إذن: $\lim_{x \rightarrow > -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t$ وعليه فإنه حسب خاصية نهاية مركب دالتين ينتج أن: $\lim_{x \rightarrow > -\frac{\pi}{2}} e^{\tan(x)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ الاستنتاج: بما أن $\lim_{x \rightarrow > -\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ فإننا نستنتج أن الدالة f مستمرة عند $x = -\pi/2$ من اليمين.	(2)												
2	0.5	تبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال D' : الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل كل x من المجال D حيث: $f'(x) = [\tan(x)]' e^{\tan(x)} = g'(x) e^{\tan(x)}$ بما أننا أثبتنا سابقا أن $g'(x) > 0$ من أجل كل x من D ، وكذلك من أجل كل x من D فإن $e^{\tan(x)} > 0$ فإنه ينتج أن الدالة $f'(x) > 0$ من أجل كل x من D وعليه فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D . جدول تغيراتها: <table><tr><td>x</td><td>$-\pi/2$</td><td>$+\pi/2$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\pi/2$	$+\pi/2$	$f'(x)$		$+$	$f(x)$	0	$+\infty$	(3)			
x	$-\pi/2$	$+\pi/2$													
$f'(x)$		$+$													
$f(x)$	0	$+\infty$													
0.5	0.5	معادلة المماس: $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow (T): y = x + 1$	(4)												
1		إنشاء المستقيم المقارب، المماس والمنحنى:	(5)												

	1		
1	1	أ/ التبيين: $\tan(x) + \ln\left(\frac{1}{x+m}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) - \ln(x+m) = 0$ $\Leftrightarrow \tan(x) = \ln(x+m) \Leftrightarrow e^{\tan(x)} = e^{\ln(x+m)} \Leftrightarrow f(x) = x+m$ وهو المطلوب.	(6)
1	4×0.25	ب/ المناقشة البيانية لحلول المعادلة: من أجل $m \in]-\infty; 1[$: المعادلة لا تقبل حلول. من أجل $m = 1$: المعادلة تقبل حلا واحدا. من أجل $m \in]1; \frac{\pi}{2}[$: المعادلة تقبل حلين. من أجل $m \in]\frac{\pi}{2}; +\infty[$: المعادلة تقبل حلا واحدا.	