

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

- 1- يحتوي صندوق على 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم 1- و ثلاثة تحمل الرقم 0 و اثنتان تحملان الرقم 1 و كرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 و 2 ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.
- ن سحب من الصندوق عشوائيا ثلاث كرات في آن واحد.
- أحسب احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الأقل.
 - ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الأرقام المسجلة على الكرات.
 - عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.
- 2- نعتبر زهر نرد بستة أوجه أربعة منها تحمل الحرف " β " و وجهان يحملان الحرف " α ".
- نقوم بالتجربة الآتية : نرمي زهر النرد اذا حصلنا على الحرف " β " نسحب على التوالي و بدون إرجاع كرتين من الصندوق و إذا حصلنا على الحرف " α " نسحب على التوالي و بالإرجاع كرتين من الصندوق.
- أحسب احتمال ظهور الحرف " α " علما أن الكرتين المسحوبتين مختلفتين في اللون.

التمرين الثاني

- I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$
- II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -\sqrt{3} + i$.
- 1- أكتب العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .
- 2- جد z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.
- 3- لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(O; -1), (D; 1), (B; 1)\}$ ذات اللاحقة z_G .
- (أ) بين أن $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$ ثم علم النقط A, B, C, D و G .
- (ب) بين أن النقط C, D, G في استقامية.
- (ج) حدد طبيعة الرباعي $OBGD$.
- 4- عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - z_B|$
- 5- عين (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $(\overline{MB} + \overline{MD} - \overline{MO})(\overline{MB} + \overline{MD} - 2\overline{MO}) = 0$

التمرين الثالث

- I. لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.
- 1- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
- 2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $1.31 < \alpha < 1.32$.
- 3- استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

2- بين أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المستقيم $y = x - e$: (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعيته مع (C_f) .

5- بين أن $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

6- أرسم (Δ) و (C_f) .

بالتوفيق للجميع

1- الحالات الممكنة للسحب : $C_{10}^3 = 120$.

• احتمال الحصول على كرتين هوداوين على الأقل :

$$P(A) = \frac{C_8^2 \times C_2^1 + C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{112}{120} = \frac{14}{15}$$

• قيم المتغير العشوائي X : $X \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

• قانون الاحتمال :

$$P(X = -2) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{120} = \frac{9}{120}$$

$$P(X = -1) = \frac{C_3^1 \times C_3^2 + C_3^3}{120} = \frac{10}{120}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^1 \times C_7^2 + C_3^2 \times C_7^1 + C_3^3}{120} = \frac{85}{120}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_3^3}{120} = \frac{10}{120}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_1^1 + C_3^3 \times C_1^1}{120} = \frac{6}{120}$$

اذن :

X	-2	-1	0	1	2
$P(X = X_i)$	$\frac{9}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{85}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{6}{120}$

-2

إحتمال " ظهور الحرف α علما أن الكرتين مختلفتين في اللون "

نضع " M : حادثة ظهور الحرف α " و " D : حادثة الكرتين

مختلفتين في اللون "

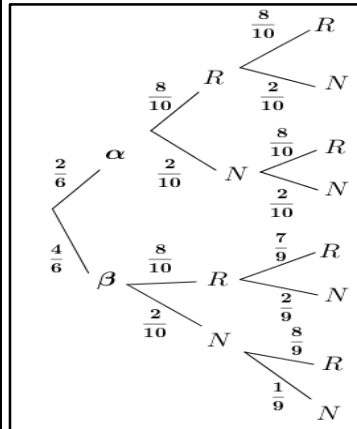
$$P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{2 \times 8^1 \times 2^1}{10^2} + \frac{4}{6} \times \frac{2A_8^1 \times A_2^1}{A_{10}^2} = \frac{232}{675}$$

لدينا

$$P(D \cap M) = \frac{2}{6} \times 2 \times \frac{8^1 \times 2^1}{10^2} = \frac{8}{75}$$

$$P_D(M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{\frac{8}{75}}{\frac{232}{675}} = \frac{9}{29}$$

يمكن استعمال شجرة الإحتمالات



التمرين الثاني

I. حل المعادلة : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

لدينا $\Delta = -64 = (8i)^2$ ومنه $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$ أو $z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$

اذن مجموعة الحلول هي $S = \{4\sqrt{3} - 4i; 4\sqrt{3} + 4i\}$

II. 1. كتابة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{4\sqrt{3} - 4i} = \frac{(4\sqrt{3} + 4i)(4\sqrt{3} + 4i)}{(4\sqrt{3} - 4i)(4\sqrt{3} + 4i)} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ومنه : } \left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\frac{z_B}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ اذن } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ طبيعة المثلث } OAB : \text{ لدينا } \left|\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right| = 1$$

$$OAB \text{ ومنه المثلث } \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

متقايس الأضلاع.

2- ايجاد z_D : لدينا العبارة المركبة للدوران هي :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z \text{ تكافئ } (z' - z_O) = e^{-i\frac{\pi}{3}} (z - z_O)$$

$$\text{تكافئ } z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z \text{ و بما أن } D \text{ صورة النقطة } C$$

$$\text{فإن : } z_D = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C$$

$$z_D = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-\sqrt{3} + i) = 2i$$

3- تبين أن $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$

$$z_G = \frac{-z_O + z_D + z_B}{-1 + 1 + 1} = \frac{0 + 2i + 4\sqrt{3} + 4i}{1} = 4\sqrt{3} + 6i$$

• تعليم النقط :

ب) تبين أن النقط G, D, C في استقامية :

طريقة ① : نثبت أن $\vec{CD} \parallel \vec{CG}$ لدينا $\vec{CG}(5\sqrt{3}; 5)$ و

$$\vec{CD}(\sqrt{3}; 1) \text{ معناه } \vec{CD} \parallel \vec{CG} \text{ ، } \sqrt{3} \times 5 - 1 \times \sqrt{3} = 0 \text{ محققة}$$

و بالتالي النقط G, D, C في استقامية.

طريقة ② : نبين أن $\frac{z_G - z_C}{z_D - z_C} = k \in \mathbb{R}$ ، لدينا

$$\frac{z_G - z_C}{z_D - z_C} = 5 \text{ و بالتالي النقط } G, D, C \text{ في استقامية.}$$

ج) طبيعة الرباعي $OBDG$: متوازي الأضلاع ،

$$\text{التبرير : } z_{\overline{OB}} = (z_B - z_O) = 4\sqrt{3} + 4i = z_{\overline{DG}}$$

4- تعيين (Γ_1) : لدينا $|z| = |z - z_B|$ تكافئ $|z - z_O| = |z - z_B|$

تكافئ $MO = MB$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة

$[OB]$

5- تعيين (Γ_2) :

$$\left(\overline{MB} + \overline{MD} - \overline{MO}\right)\left(\overline{MB} + \overline{MD} - 2\overline{MO}\right) = 0$$

$$\left(\overline{MG}\right)\left(\overline{MB} + \overline{MD} + 2\overline{OM}\right) = 0$$

$$\left(\overline{MG}\right)\left(\overline{OM} + \overline{MB} + \overline{OM} + \overline{MD}\right) = 0$$

$$\overline{MG} \cdot \overline{OG} = 0 \text{ أي } \left(\overline{MG}\right)\left(\overline{OB} + \overline{OD}\right) = 0$$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم العمودي على المستقيم (OG) في النقطة G أي الذي يشمل G و $\overline{OG}$ ناظما له.

التمرين الثالث

I. 1- دارة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$: $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ و

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

بما أن $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$.

• جدول تغيراتها :

2- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد :

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1.31; 1.32]$

$$g(1.32) \approx 0.02 \text{ و } g(1.32) \approx -0.01 \text{ أي } g(1.32) < 0 < g(1.32) \text{ فإنه حسب}$$

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد

$$1.31 < \alpha < 1.32$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

3- استنتاج إشارة $g(x)$:

$$\text{II. 1- تبين أن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - e + \frac{1}{x} \left(1 - \ln x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

2- دارة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x = \frac{x^2 - 2 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. إذن الدالة متناقصة تماما

على المجال $]0; \alpha[$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

• جدول تغيراتها :

4- المقتيم $y = x - e$ مقارب لـ (C_f) معناه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

• دراسة الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - (x - e) = \frac{1 - \ln x}{x}$$

$$\left[0; +\infty\right] \text{ لدينا : } \frac{1 - \ln x}{x} = 0 \text{ يكافئ } \begin{cases} 1 - \ln x = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \text{ أي}$$

$$x = e \text{ إذن :}$$

☒ (C_f) فوق (Δ) في المجال $]0; e[$ و (C_f) تحت (Δ)

في المجال $[e; +\infty[$.

☒ (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(e; 0)$.

$$\text{5- تبين أن } f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha} \text{ لدينا : } g(\alpha) = \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$$

$$\text{أي } \ln \alpha = 2 - \alpha^2 \text{ ولدينا من جهة أخرى } f(\alpha) = \alpha - e + \frac{1 - \ln \alpha}{\alpha}$$

ومنه :

$$f(\alpha) = \alpha - e + \frac{1 - (2 - \alpha^2)}{\alpha} = \alpha - e - \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\alpha} = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$$

• استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$: لدينا $1.31 < \alpha < 1.32$ أي

$$\begin{cases} -0.1 < 2\alpha - e < -0.08 \\ -0.76 < -\frac{1}{\alpha} < -0.75 \end{cases} \text{ إذن } -0.86 < f(\alpha) < -0.83$$

6- رسم (Δ) و (C_f) :

