

التاريخ: 2023/05/25
المدة: ساعتين

المادة: رياضيات

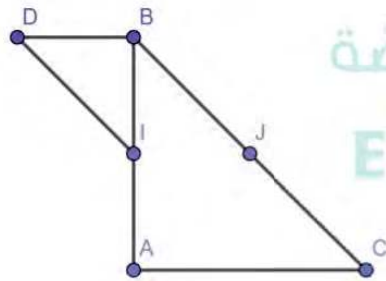
المستوى: 2 علوم تجريبية

اختبار الفصل الثالث

التمرين الأول: (05 نقاط)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 5$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = 4u_n - 3$.
- و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = \frac{3}{u_n - 1}$.
- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.
 - احسب v_0 ثم اكتب v_n بدلالة n .
 - بين أن $u_n = \frac{3}{v_n} + 1$ ثم استنتج u_n بدلالة n ، ثم احسب نهايتها.
 - احسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n والجداء P_n حيث:
 $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

التمرين الثاني: (06 نقاط)



- ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث 4 AB و BDI مثلث قائم في B ومتساوي الساقين، I منتصف [AB]، J منتصف [BC]. احسب الجداءات السلمية التالية:
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ، $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ ، $\vec{AI} \cdot \vec{CJ}$ ، $\vec{AC} \cdot \vec{JI}$ ، $\vec{AC} \cdot \vec{ID}$ و $\vec{AJ} \cdot \vec{ID}$.
- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(-2; -1)$ ، $B(1; 3)$ و $C(2; -4)$.
 - احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ، $\|\vec{AB}\|$ و $\|\vec{AC}\|$. ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.
 - اكتب معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها A وتشمل النقطة B.
 - (Δ) هو المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له.
 - بين أن معادلة المستقيم (Δ) هي: $3x + 4y - 15 = 0$ ، تحقق أن المستقيم (Δ) هو مماس للدائرة $(\mathcal{C})$.
 - اكتب معادلة لكل من المستقيمين (Δ') و (Δ'') اللذان يعامدان المستقيم (Δ) ويمسّان الدائرة $(\mathcal{C})$.
 - عين نقطتي تقاطع الدائرة $(\mathcal{C})$ مع المستقيم ذو المعادلة: $x + 2y - 1 = 0$.
 - m طبيعة مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق $2x^2 + 2y^2 + 4mx + 2m = 0$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أ. احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف الدالة f .

ب. بين أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة أحدها مائل (Δ) معادلته $y = x + 1$ ، اكتب معادلة لكل من المستقيمين الآخرين.

ج. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ، محددا إحداثيات نقطة تقاطعهما.

2. أ. بين أنه من أجل كل $x \neq -1$ و $x \neq 1$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$.

ب. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ. بين أن المنحنى (C_f) يقبل أربع مماسات معامل توجيهها -2 . (لا يطلب كتابة معادلاتها)

ب. دون حساب $f''(x)$ ، بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أ. بين أنه من أجل كل $x \neq -1$ و $x \neq 1$ فإن: $f(-x) + f(x) = 2$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

ب. اكتب معادلة المماس (C_f) عند $x_0 = 0$. ارسم (Δ) ، (C_f) و (C_f) .

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^3 + x^2(m+1) - (m+1) = 0$.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$ ، (C_g) تمثيلها البياني.

أ. بين أن الدالة g هي دالة زوجية.

ب. اكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

ج. اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) وارسمه في المعلم السابق.

بالتوفيق

من إعداد: الأستاذ بن مسعود

المادة: رياضيات	السنة الدراسية: 2022-2023
الأستاذ: بن مسعود	المستوى: 2 ع ت

$$P_n = (U_0 - 1)(U_1 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)$$

$$P_n = \frac{3}{V_0} \times \frac{3}{V_1} \times \dots \times \frac{3}{V_n}$$

$$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \dots \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+\dots+n}}$$

$$P_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n^2+3n+2}{2}}} = 4^{\frac{n^2+3n+2}{2}}$$

التحريز الثاني :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \quad (\text{متعامدان})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{BA} = -AB^2 = -16$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{CI} = \vec{AI} \cdot \vec{AI} = AI^2 = 4 \quad (\text{AI هو المتوسط العمودي على BC})$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{JI} = -AC \times JI = -8$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{ID} = AC \times ID \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -8$$

$$\vec{AJ} \cdot \vec{ID} = 0 \quad (\text{متعامدان})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 - 12 = 0 \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (II)$$

$$\| \vec{AC} \| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \quad \| \vec{AB} \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

ABC قائم في A ومتساوي الساقين

(ع) مركزها A(-2, 1) نصف قطرها AB=5

(ع) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ ومنه

(د) : $-3x - 4y + c = 0$ (P) $c = 15$ لكونها بارداً متعامدة B

ومنه (د) : $3x + 4y - 15 = 0$

د(A, A) = $\frac{13(-2) + 4(1) - 15}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 = 91$

ومنه (د) معاكس لـ (ع)

(ج) $\vec{u}$ شعاع ناضج لـ (A) (نار) (A)

منه معادلتها من الشكل $4x - 3y + c = 0$

التحريز الأول :

$$V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1} - 1} \quad (1)$$

$$N_{n+1} = \frac{3}{4U_n - 3 - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{U_n - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n$$

(V_n) هندسي أساسها $q = \frac{1}{4}$

(2) $V_n = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه $V_0 = \frac{3}{U_0 - 1} = \frac{3}{4}$

(3) لدينا : $V_n = \frac{3}{U_n - 1}$ ومنه $\frac{U_{n-1} - 1}{3} = \frac{1}{V_n}$

أي $U_n = \frac{3}{V_n} + 1$ نجد : $U_n - 1 = \frac{3}{V_n}$

في الأخير : $U_n = \frac{3}{\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n} + 1$

لأن $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$

(4) $S_n = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right)$

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$S'_n = \frac{3}{V_0} + 1 + \frac{3}{V_1} + 1 + \dots + \frac{3}{V_n} + 1$$

$$S'_n = 3 \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n} \right) + \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ مرة}}$$

م.م هندسي
أساسها $\frac{1}{4}$
حده الأول $\frac{4}{3}$

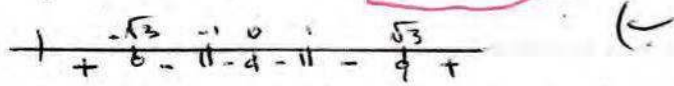
$$S'_n = 3 \left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \dots + \left(\frac{4}{3}\right) 4^n \right) + n + 1$$

$$S'_n = 4 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right) + n + 1$$

$$S'_n = \frac{4}{3} (4^{n+1} - 1) + n + 1$$

(2) $f(x) = \frac{(3x^2+2x+1)(x^2-1)(2x)(x^2+x^2-1)}{(x^2-1)^2}$

$f(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$



فترات زيادة (x) المحلية: $[-\infty, -\sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3}, +\infty]$
فترات نقص (x) المحلية: $[-1, -\sqrt{3}]$, $[-1, 1]$ و $[1, \sqrt{3}]$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	-	-	-	-	+	
f(x)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = -2$ $f'(x) = -2$ (3)

نبتة نجد: $3x^4-7x^2+2=0$

$3x^2-7x+2=0$

$x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{2}{3}$

$x = 2$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$ $x = -\sqrt{2}$

تقبل حلين

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

و عند (4) يقبل أربع محاسبات
محاسبات: -2

(5) تقدم عند $x=0$ ونغير اشارتها
و عند (6) يقبل نقطة انعطاف هي $A(0,1)$

(4) $f(-x) + f(x) = \frac{-x^3+x^2-1}{x^2-1} + \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$
 $= \frac{2x^2-2}{x^2-1} = 2$

لذا أن $f(-x) + f(x) = 2$

بأن (6) يقبل مركز تناظر هي النقطة $A(0,1)$

(ج) معادلة (T):

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 0(x-0) + 1$

$y = 1$

(T) هو محاسبات فغني

(A') و (A'') $d(A;A) = d(A',A) = \frac{|4(-2)-3(-1)+c|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 5$

و عند $|-5+c| = 25$

$-5+c = 25$

$c = 30$

$-5+c = -25$

$c = -20$

في الأصل فغير

(A): $4x-3y+30=0$ (A''): $4x-3y-20=0$

$x=1-2y$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1=0 & (1) \\ (x+1)+(y+1)^2=25 & (2) \end{cases}$ نفوض على (2)

$(3-2y)^2 + (y+1)^2 = 25$

$y^2-2y-3=0$ ننشر ونبسط نجد:

تقبل حلين: $y = -1$ و $y = 3$

ونجد $x = 3$

ونجد $x = -5$

و عند $(3,-1)$ و $(-5,3)$ هما نقطتي التماس

$x^2+y^2+2mx+m=0$

$\frac{a^2+b^2-4c}{4} = \frac{m^2-m}{4}$

$a=2m$
 $b=0$
 $c=m$

m	$-\infty$	0	1	$+\infty$
m^2-m	$+\infty$	0	-1	$+\infty$

$d((m,0), \text{دائرة}) = 0$: دائرة مركزها $(m,0)$ نصف قطرها $\sqrt{m^2-m}$

$m \in]0,1[$: دائرة مضمومة خارجة
 $m=1$: المماس $(-1,0)$
 $m=0$: المماس $(0,0)$

التمرين الثالث:

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

(2) سقيم مقارب مائل (3) يكون $-\infty$ و $+\infty$

ويقبل (4) متقارب آخر هما $x=1$ و $x=-1$

(ج) الوضع:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-\infty$	-	0	+	$+\infty$
x^2-1	$+\infty$	+	-	+	$+\infty$
$f(x)-y$	-	+	+	-	+

$f(x)-y = \frac{x}{x^2-1}$

(A) $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

(B) $x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

$A(0,1)$ عند (A) يتقاطع (B) $x=0$

(5) مبرهنه تعريف الدالة و تناقصها
بالنسبة للمغير

$$g(-x) = f(-1-x) = f(1-x) = g(x)$$

وصف دالة زوجية

(6)

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) = \frac{-x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} & \text{لما } x > 1 \text{ و } x < -1 \\ f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} & \text{لما } -1 < x < 1 \text{ و } x < -1 \end{cases}$$

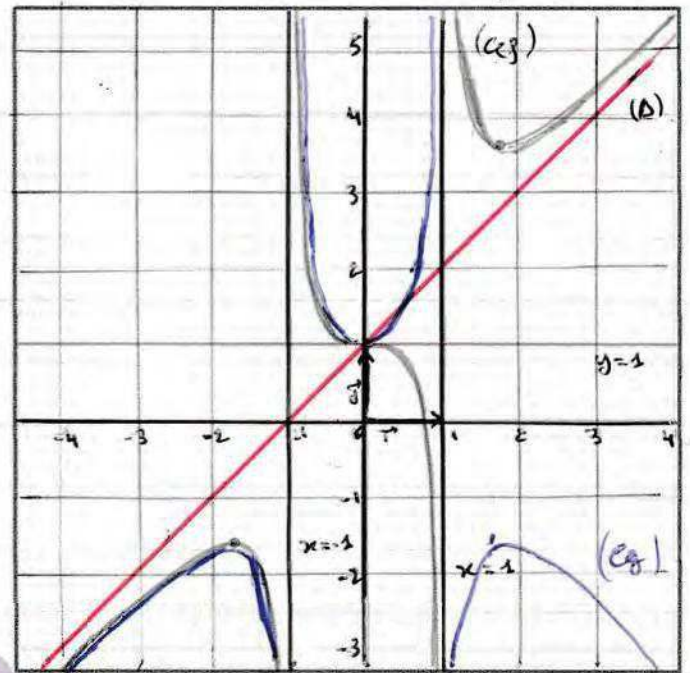
(7)

لما $x \in]-\infty, -1] \cup]0, 1[$ (مثبت) (د) $g(x) = f(x)$
 ولما $x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ (سالب) $g(x) = f(-x)$
 فيان (د) يكون متناظرا بالنسبة لمحور
 التماثل.

انتهى

الأستاذ بن مسعود

* الرسم :



(8)

$$x^3 + mx^2 + x^2 - m - 1 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 1 = -mx^2 + m$$

$$x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 1)(-m)$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = -m$$

$$f(x) = -m$$

مناقشة أفقية (نقاط (د) مع المستقيمة $y = -m$)

$$\text{لما } -m < 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m > \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

حليين سالبين

وحل موجب

$$\text{لما } -m = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{لما } -m < 1 \text{ أي } m > -1$$

$$\text{أي } -1 < m < \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{لما } -m = 1 \text{ أي } m = -1$$

$$\text{لما } -m < 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m > -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{أي } -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} < m < -1$$

$$\text{لما } -m = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \text{ أي } m = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{لما } -m > 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m < -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{أي } m < -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{لما } -m < 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m > \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{أي } m > \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$