

التمرين الأول:

- (C) هي الدائرة المثلثية ذات المركز O المرفقة بالمعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}, \vec{j})$.
1. حوّل الى الراديان القيسين التاليين: 150° و 120° ثم الى الدرجة كل من $\frac{\pi}{7}$ و $\frac{5\pi}{8}$.
 2. عيّن على الدائرة (C) النقاط A, B, C و D صور الاعداد: $\frac{63\pi}{4}$, $\frac{2019\pi}{4}$, $-\frac{123\pi}{3}$ و -43π على الترتيب.
 3. اوجد احداثيات النقط A, B, C و D في المعلم $(\vec{i}, \vec{j})$.
 4. علما ان $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ استنتج جيب و جيب تمام الزوايا: $-\frac{\pi}{8}$; $\frac{9\pi}{8}$ و $\frac{23\pi}{8}$.
 5. بيّن ان: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{8}\right) = 0$
 6. لتكن العبارة: $E(x) = \sin(11\pi - x) + 2\sin(-x) + \sin(6\pi + x) - \cos(x - \pi)$
 - بيّن ان: $E(x) = \cos x$
 - حل في $[-\pi; \pi]$ المعادلة: $E(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

التمرين الثاني:

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}, \vec{j})$

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 8x + 20$. (C_f) منحناها البياني و (P) التمثيل البياني للدالة مربع.
 - أ) بيّن انه من اجل كل عدد حقيقي x فان: $f(x) = (x - 4)^2 + 4$
 - ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; 4]$ و $[4; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.
 - ج) اشرح كيف يمكن استنتاج (C_f) انطلاقا من (P) ثم ارسمه.

د) حل بيانيا المعادلة: $f(x) = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

2. نعتبر المثلث ABC القائم في B حيث: $AB = 4cm$; $BC = 2cm$

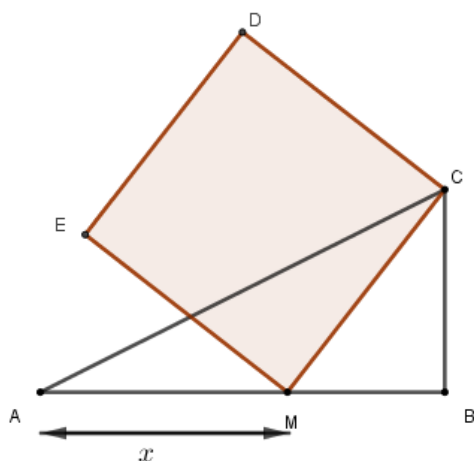
M نقطة متحركة على [AB] حيث $AM = x cm$

3. لتكن النقطتان E و D بحيث يكون MCDE مربع (انظر الشكل)

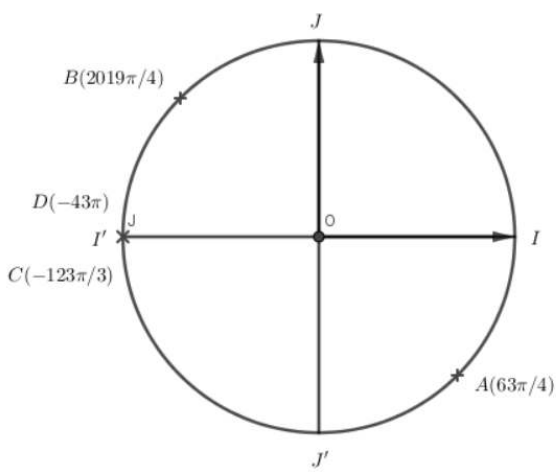
أ) ماهي مجموعة القيم الممكنة للعدد x.

ب) عبّر عن طول الضلع MC بدلالة x ثم استنتج ان مساحة المربع MCDE هي $f(x)$

ج) استنتج قيمة x التي من اجلها تكون مساحة المربع MCDE أصغر ما يمكن.



الحل النموذجي للواجب المنزلي رقم 5

التقسيط	حل التمارين
1 ن	<u>حل التمرين الأول:</u> (C) الدائرة المثلثية ذات المركز O المرفقة بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 1. أ. تحويل القيسين من الدرجة إلى الراديان: $180^\circ \rightarrow \pi \text{ rad}$ لدينا: $150^\circ \rightarrow x \text{ rad}$ ومنه: $x = \frac{150 \times \pi}{180} = \frac{5}{6} \pi \text{ rad}$ و $x = \frac{120 \times \pi}{180} = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$ ب. تحويل القيسين من الراديان إلى الدرجة: $\pi \text{ rad} \rightarrow 180^\circ$ لدينا: $\frac{\pi}{7} \text{ rad} \rightarrow x^\circ$ ومنه: $x = \frac{\frac{\pi}{7} \times 180}{\pi} = \frac{180}{7}$ و $x = \frac{\frac{5\pi}{8} \times 180}{\pi} = \frac{900}{8}$ $x = 112.5 \text{ rad}$
2 ن	2. تعيين النقط A ، B ، C و D على الدائرة المثلثية (C): لدينا: $\checkmark \frac{63\pi}{4} = \frac{64\pi - \pi}{4} = 8 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}$ $\checkmark \frac{2019\pi}{4} = \frac{2020\pi - \pi}{4} = 252 \times 2\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$ $\checkmark -\frac{123\pi}{3} = -20 \times 2\pi - \pi$ $\checkmark -43\pi = -21 \times 2\pi - \pi$
2 ن	

3. إيجاد إحداثيات النقط A ، B ، C و D في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

✓ إحداثيات النقط A :

$$\cos\left(\frac{63\pi}{4}\right) = \cos\left(8 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$\sin\left(\frac{63\pi}{4}\right) = \sin\left(8 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ومنه:}$$

✓ إحداثيات النقط B :

$$\cos\left(\frac{2019\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$\sin\left(\frac{2019\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ومنه:}$$

✓ إحداثيات النقط C :

$$\cos\left(-\frac{123\pi}{3}\right) = \cos(-20 \times 2\pi - \pi) = \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\sin\left(-\frac{123\pi}{3}\right) = \sin(-20 \times 2\pi - \pi) = \sin(-\pi) = -\sin(\pi) = 0$$

$$C(-1; 0) \quad \text{ومنه:}$$

✓ إحداثيات النقط D :

$$\cos(-43\pi) = \cos(-21 \times 2\pi - \pi) = \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\sin(-43\pi) = \sin(-21 \times 2\pi - \pi) = \sin(-\pi) = -\sin(\pi) = 0$$

$$D(-1; 0) \quad \text{ومنه:}$$

4. استنتاج جيب وجيب تمام الزوايا:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \quad \text{لدينا:} \quad \text{وبما أن:} \quad \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1 - \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \text{فإن:}$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{أو} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{أي:}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{فإن:} \quad \frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{وبما أن:}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \checkmark \text{ لدينا:}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \checkmark \text{ لدينا:}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{و}$$

$\checkmark$ لدينا:

$$\cos\left(\frac{23\pi}{8}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2\pi + \pi - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{23\pi}{8}\right) = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2\pi + \pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

01 ن

$$5. \text{ إثبات أن } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{8}\right) = 0$$

لدينا:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

01 ن

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{8}\right) = 0$$

$$6. \text{ أ. إثبات أن } E(x) = \cos x$$

لدينا:

$$E(x) = \sin(11\pi - x) + 2\sin(-x) + \sin(6\pi + x) - \cos(x - \pi)$$

$$E(x) = \sin(5 \times 2\pi + \pi - x) - 2\sin(x) + \sin(3 \times 2\pi + x) - \cos(-(\pi + x))$$

$$E(x) = \sin(\pi - x) - 2\sin(x) + \sin(x) - \cos((\pi + x))$$

$$E(x) = \sin(x) - 2\sin(x) + \sin(x) + \cos(x)$$

$$E(x) = \cos(x)$$

$$E(x) = \cos(x) \quad \text{ومنه:}$$

01.5 ن

$$ب. \text{ حل في المجال } [-\pi; \pi] \text{ المعادلة } E(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{تكافئ:} \quad E(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{تكافئ:} \quad x = -\frac{\pi}{6} \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

ومنه: $S = \left\{ -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\}$

حل التمرين الثاني:

لدينا: $f(x) = x^2 - 8x + 20$ و (C_f) منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) = (x-4)^2 + 4$:

$$(x-4)^2 + 4 = x^2 + 4^2 - 2(-4)x + 4$$

$$(x-4)^2 + 4 = x^2 - 8x + 20$$

$$(x-4)^2 + 4 = f(x)$$

إذن: من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = (x-4)^2 + 4$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f :

على المجال $]-\infty; 4]$:

نعتبر x_1 و x_2 عددين حقيقيين من المجال $]-\infty; 4]$ حيث: $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 4 < x_2 - 4 \leq 0$$

لدينا:

$$(x_1 - 4)^2 > (x_2 - 4)^2$$

$$(x_1 - 4)^2 + 4 > (x_2 - 4)^2 + 4$$

أي: $f(x_1) > f(x_2)$

إذن: الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 4]$.

على المجال $[4; +\infty[$:

نعتبر x_1 و x_2 عددين حقيقيين من المجال $[4; +\infty[$ حيث: $x_1 < x_2$

$$4 \leq x_1 < x_2$$

$$0 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4$$

لدينا:

$$(x_1 - 4)^2 < (x_2 - 4)^2$$

$$(x_1 - 4)^2 + 4 < (x_2 - 4)^2 + 4$$

أي: $f(x_1) < f(x_2)$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; +\infty[$.

تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$		4	

ج. شرح كيفية استنتاج (C_f) انطلاقا من (P) :

لتكن: $M(x; y)$ نقطة من المنحنى (C_f) معناه $y = f(x)$

أي: $y = (x-4)^2 + 4$
 $y - 4 = (x-4)^2$ (1)

0.5 ن

02 ن

02 ن	بوضع: $\begin{cases} X = x - 4 \\ Y = y - 4 \end{cases}$ و بالتعويض في (1) نجد: $Y = X^2$ ومنه: المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (P) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}(4;4)$ ✓ رسم المنحنى (C_f): انظر التمثيل المرفق
01.5 ن	د. حل بيانيا المعادلة $f(x) = \alpha$: حلول المعادلة $f(x) = \alpha$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = \alpha$ $\alpha \in]-\infty; 4[$: المعادلة لا تقبل حلول. $\alpha = 4$: المعادلة تقبل حل واحد $x = 4$. $\alpha \in [4; +\infty[$: المعادلة تقبل حلين موجبين.
0.50 ن	2. أ. تعيين مجموعة القيم الممكنة للعدد x: لدينا: $AM = x$ و $M \in [AB]$ إذن: $x \in [0; 4]$ ب. التعبير عن MC بدلالة x: بما ان المثلث MBC قائم في B فإنه بتطبيق نظرية فيثاغورس نجد: $MC^2 = MB^2 + BC^2$ $MC^2 = (4 - x)^2 + 2^2$ $MC^2 = 16 - 8x + x^2 + 4$ $MC^2 = x^2 - 8x + 20$ أي: $MC = \sqrt{x^2 - 8x + 20} \text{ cm}$
01 ن	✓ استنتاج ان مساحة المربع $MCDE$ هي $f(x)$: لدينا: $S_{MCDE} = MC^2$ أي: $S_{MCDE} = \sqrt{x^2 - 8x + 20}^2$ $S_{MCDE} = x^2 - 8x + 20$ ومنه: $S_{MCDE} = f(x) \text{ cm}^2$
01 ن	ج. استنتاج قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المربع $MCDE$ أصغر ما يمكن: من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها 4 تبلغها من أجل $x = 4$. إذن: تكون مساحة المربع أصغر ما يمكن إذا كانت $S_{MCDE} = 4 \text{ cm}^2$ والتي تبلغها من أجل $x = 4$.
0.50 ن	

التمثيل البياني (C_f)

