

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{4x^2-1}-2x} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+(2-n)x^2+(1-2n)x-n} \quad n \in \mathbb{N}$$

التمرين الثاني:

صندوق  $u$  يحتوي على 6 كرات لا تفرق بينها عند اللمس، (03) كرات بيضاء تحمل كل منها العدد 0 و 1 و 2، و كرية حمراء تحمل العدد 3 و كرتان سوداوان تحمل كل منها العدد  $\beta$  و  $\beta + 1$  (حيث  $\beta$  عدد زوجي أكبر تماما من 2). ن سحب عشوائيا من الصندوق  $u$  كرتين على التوالي دون الإرجاع.

1. أُنشئ مخططا مناسبا يبين جميع الإمكانيات المناسبة لهذه التجربة العشوائية
2.  $a$  أحسب احتمال الأحداث التالية :

الحادث  $A$  "الحصول على كرتين من لونين مختلفين" الحادث  $B$  "الحصول على كرتين مجموع عدديهما عدد زوجي"

الحادث  $C$  "الحصول على كرتين سوداوان أو مجموع عدديهما زوجي فقط"

$$b \text{ بين أن : } P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{15}, \text{ ثم أحسب } P(\bar{A} \cup B)$$

نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل مصب القيمة المطلقة للفرق بين العددين المحصل عليها

3.  $a$  ما هي القيم الممكنة لـ  $X(\Omega)$ ، ثم عين قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$

$$b \text{ بين أن : } E(X) = \frac{8\beta+3}{15}. \text{ ثم عين قيمة العدد الحقيقي } \beta \text{ التي تحقق } E(39X + 1447) = 1954$$

$$c \text{ أحسب } (P(X^3 - (2\beta + 1)X^2 + (\beta^2 + 2\beta - 1)X + 1 - \beta^2 = 0))$$

التمرين الثالث:

$ABC$  مثلث كيني مرود بالمعلم  $(A; \overline{AB}, \overline{AC})$ .

لكل عدد حقيقي  $t$  من المجال  $[0; 1]$ ، نعرف النقطة  $G_t$  مرجح الجملة المتقلة  $\{(A; t^2); (B; (1-t)^2); (C; 2t(1-t))\}$

1.  $a$  برر أن النقطة  $G_t$  موجودة مهما يكن  $t \in [0; 1]$

$b$  بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $t$  من المجال  $[0; 1]$  فإن:  $\overline{AG_t} = (1-t)^2 \overline{AB} + 2t(1-t) \overline{AC}$ ، ثم استنتج إحداثي النقطة  $G_t$  بدلالة  $t$

$c$  عين قيم العدد الحقيقي  $t$  التي من أجلها تنتمي النقطة  $G_t$  الى المستقيم ذي المعادلة  $y = x$

$d$  بين أن مجموعة النقط  $G_t$  من المستوي لما  $t$  يمسح المجال  $[0; 1]$  متعنى معادلته  $y = 2(\sqrt{x} - x)$

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; 1]$  بـ:  $f(x) = 2(\sqrt{x} - x)$

2.  $a$  أدرس تغيرات الدالة  $f$

$b$  استنتج قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي من أجلها تكون ترتيبية النقطة  $G_t$  أكبر ما يمكن (أعظمية)

نرف النقطة  $D_t$  مرجح الجملة المتقلة  $\{(B; (1-t)); (C; 2t)\}$

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $t$  من المجال  $[0; 1]$  فإن:  $\overline{AG_t} = (1-t^2) \overline{AD_t}$ ، ثم أُنشئ التطين  $D_{\frac{1}{2}}$  و  $G_{\frac{1}{2}}$

4. نعتبر  $(\Gamma_t)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق:  $\|t^2 \overline{MA} + (1-t)^2 \overline{MB} + 2t(1-t) \overline{MC}\| = \frac{4(1-t)}{3} \|(1-t) \overline{MB} + 2t \overline{MC}\|$

– عين قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي من أجلها تكون المجموعة  $(\Gamma_t)$  مستقيما محوريا للقطعة المستقيمة  $[G_t D_t]$  ثم أُنشئ المجموعة  $(\Gamma_1)$

$$L: \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x \rightarrow 1 \sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}} \rightarrow 0 = \tilde{0} \cdot \infty \cdot 2$$

$$= L: \frac{(\sqrt{3x^2+1}-2)(\sqrt{3x^2+1}+2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}{x \rightarrow 1 (\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})(\sqrt{3x^2+1}+2)}$$

$$= L: \frac{((3x^2+1)-2^2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}{x \rightarrow 1 [(x+3)-(3x+1)](\sqrt{3x^2+1}+2)}$$

$$= L: \frac{(3x^2-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}{x \rightarrow 1 (-2x+2)(\sqrt{3x^2+1}+2)} \rightarrow 0 = \tilde{0} \cdot \infty \cdot 2$$

$$= L: \frac{3(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}{x \rightarrow 1 -2(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}$$

$$= L: \frac{3(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}{x \rightarrow 1 -2(\sqrt{3x^2+1}+2)} \rightarrow 24$$

$$= -6$$

$$\rightarrow -8$$

$$L: \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1/x \rightarrow +\infty \sqrt{4x^2-1}-2x} = \tilde{0} \cdot \infty \cdot 2$$

$$; x \rightarrow +\infty: \text{حالة}$$

$$L: \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{1/x \rightarrow +\infty (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{4x^2-1}-2x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}$$

$$= L: \frac{1(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{x \rightarrow +\infty -2(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$= L: \frac{\sqrt{4x^2(1-\frac{1}{4x^2})}+2x}{x \rightarrow +\infty -\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+x}$$

$$= L: \frac{2x\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}+2x}{x \rightarrow +\infty -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= L: \frac{2x(\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}+1)}{x \rightarrow +\infty -x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

2021/2026

جميع الفروع

التكامل الأول  
- حساب النهايات:

$$L: \frac{x^3-x^2-5x-3}{x \rightarrow -1 x^3+(2-x)x^2+(1-2x)x-m} \rightarrow 0 = \tilde{0} \cdot \infty \cdot 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x-3 & x+1 \\ -x^3-x^2 & x^2-2x-3 \\ \hline 0-9x^2-5x & \\ 9x^2+9x & \\ \hline -3x-3 & \\ +3x+3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+(2-x)x^2+(1-2x)x-m & x+2 \\ -x^3-x^2 & x^2+(1-x)x-m \\ \hline 0+(1-x)x^2+(1-2x)x & \\ (x-1)x^2+(x-1)x & \\ \hline 0-mx-m & \\ +mx+m & \\ \hline 0 & \end{array}$$

وحيث:

$$L: \frac{(x+1)(x^2-2x-3)}{x \rightarrow -1 (x+1)(x^2+(1-x)x-m)}$$

$$= L: \frac{x^2-2x-3}{x \rightarrow -1 x^2+(1-x)x-m} \rightarrow 0 = \tilde{0} \cdot \infty \cdot 2$$

نقوم مرة أخرى بتحليل البسط والمقام زحمة:

$$= L: \frac{(x+1)(x-3)}{x \rightarrow -1 (x+1)(x-m)} = \frac{4}{-1-m}$$

صفحة الاستاذ فغلول  
للرياضيات

$\bar{A} \cap B$ : الحصول على كرتين من

نفس اللون و مجموع عدديهما زوجي

$$\bar{A} \cap B = \{B_0 B_2, B_2 B_0\}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

حيث  $P(\bar{A} \cup B)$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$= \left(1 - \frac{22}{30}\right) + \frac{12}{30} - \frac{2}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

③ القيمة المتوقعة  $X$

$$X = \{1, 2, 3, \beta-3, \beta-2, \beta-1\}$$

$\downarrow$   
 $N_{\beta+1} N_{\beta+1}, B_0 B_1, B_2 B_1, B_0 B_2, B_2 B_0, B_0 R_3, N_{\beta} R_3, R_3 B_0, R_3 N_{\beta}, N_{\beta+1} R_3, N_{\beta} B_0, B_0 N_{\beta+1}, B_1 B_2, R_2 R_3, B_2 R_3, R_3 B_2, R_3 B_1, B_1 B_0, B_0 B_1, B_1 N_{\beta}, N_{\beta} B_1, B_1 N_{\beta+1}, N_{\beta+1} B_1, B_1 N_{\beta+1}, B_1 N_{\beta+1}, B_1 N_{\beta+1}$

صفحة الأستاذ فقلول  
لرياضيات

- تعيين آفاق الاحتمال

$$P(X=1) = \frac{8}{30} ; P(X=2) = \frac{4}{30}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{30} ; P(X=\beta-3) = \frac{2}{30}$$

$$P(X=\beta-2) = \frac{4}{30} ; P(X=\beta-1) = \frac{4}{30}$$

$$P(X=\beta) = \frac{4}{30} ; P(X=\beta+1) = \frac{2}{30}$$

$$E(X) = \frac{8\beta+3}{15} \text{ : بيان أ ب : ⑥}$$

حالة  $n \rightarrow -\infty$

$$L = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{4n^2-1} - 2n} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)}{-2n \left( \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}} + 1 \right)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

التحسين الثاني

صفحة ١١ (  $B_0, B_1, B_2, R_3, N_{\beta}, N_{\beta+2}$  )

② الخطأ الكتاب ( جدول )

| سحب | ②             | $B_0$             | $B_1$             | $B_2$             | $R_3$             | $N_{\beta}$             | $N_{\beta+2}$           |
|-----|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| ④   | $B_0$         |                   | $B_0 B_1$         | $B_0 B_2$         | $B_0 R_3$         | $B_0 N_{\beta}$         | $B_0 N_{\beta+2}$       |
|     | $B_1$         | $B_1 B_0$         |                   | $B_1 B_2$         | $B_1 R_3$         | $B_1 N_{\beta}$         | $B_1 N_{\beta+2}$       |
|     | $B_2$         | $B_2 B_0$         | $B_2 B_1$         |                   | $B_2 R_3$         | $B_2 N_{\beta}$         | $B_2 N_{\beta+2}$       |
|     | $R_3$         | $R_3 B_0$         | $R_3 B_1$         | $R_3 B_2$         |                   | $R_3 N_{\beta}$         | $R_3 N_{\beta+2}$       |
|     | $N_{\beta}$   | $N_{\beta} B_0$   | $N_{\beta} B_1$   | $N_{\beta} B_2$   | $N_{\beta} R_3$   |                         | $N_{\beta} N_{\beta+2}$ |
|     | $N_{\beta+2}$ | $N_{\beta+2} B_0$ | $N_{\beta+2} B_1$ | $N_{\beta+2} B_2$ | $N_{\beta+2} R_3$ | $N_{\beta+2} N_{\beta}$ |                         |

⑤ حساب احتمال الحوادث :

$$P(A) = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

$$P(B) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

الحدث  $E$ : الحصول على كرتين

— دارين .

$$P(C) = P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E)$$

$$= \frac{12}{30} + \frac{2}{30} - \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{15} \text{ : بيان أ ب : ⑥}$$

$\bar{A}$ : الحصول على كرتين من نفس اللون

$$P(X^3 - (2\beta + 1)X^2 + (\beta^2 + 2\beta - 1)X + 1 - \beta^2)$$

$$= P(X=1) + P(X=\beta-1) + P(X=\beta+1)$$

$$= \frac{8}{30} + \frac{4}{30} + \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

حل المسألة الثالثة :

بيان أن  $G_t$  موجودة مهما كان  $t \in [0, 1]$  :

$$t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \neq 0$$

$$t^2 + 1^2 + t^2 - 2t + 2t - 2t^2 \neq 0$$

$$1^2 \neq 0$$

اذن  $G_t$  موجودة  $\forall t \in [0, 1]$  ف  $G_t$  موجودة

(ب) بيان أن  $G_t$  نقطة على المستقيم  $AB$  أو  $AC$  :

$$\vec{AG}_t = \frac{(1-t)^2}{1} \vec{AB} + \frac{2t(1-t)}{1} \vec{AC}$$

أو يمكن كتابتها :

$G_t$  مرجع المحاور

$$t^2 \vec{GA} + (1-t)^2 \vec{GB} + (2t(1-t)) \vec{GC} = \vec{0}$$

$$t^2 \vec{GA} + (1-t)^2 \vec{GA} + (1-t)^2 \vec{AB} : \text{أي}$$

$$+ (2t(1-t)) \vec{GA} + (2t(1-t)) \vec{AC} = \vec{0}$$

$$(t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t)) \vec{GA} + (1-t)^2 \vec{AB} : \text{أي}$$

$$+ 2t(1-t) \vec{AC} = \vec{0}$$

$$1 \vec{GA} + (1-t)^2 \vec{AB} + 2t(1-t) \vec{AC} = \vec{0}$$

$$\vec{AG}_t = (1-t)^2 \vec{AB} + 2t(1-t) \vec{AC}$$

- احداثي النقط  $G_t$  :

$$G_t \left( (1-t)^2 ; 2t(1-t) \right)$$

$$E(X) = \frac{1 \times 8 + 2 \times 4 + 2 \times 3 + (\beta-3)2 + (\beta-2)4}{30}$$

$$+ \frac{(\beta-1)4 + \beta(4) + (\beta+1)2}{30}$$

$$= \frac{22 + 2\beta - 6 + 4\beta - 8 + 4\beta - 4 + 4\beta + 2\beta + 2}{30}$$

$$= \frac{16\beta + 6}{30} = \frac{2(8\beta + 3)}{30} = \frac{8\beta + 3}{15}$$

- نعين قيمة العدد الحقيقي  $\beta$  :

$$E(39X + 1447) = 1954$$

$$39E(X) + 1447 = 1954$$

$$39\left(\frac{8\beta + 3}{15}\right) = 507$$

نحل المعادلة في  $\beta$  :

حل المسألة (ج) :

$$X^3 - (2\beta + 1)X^2 + (\beta^2 + 2\beta - 1)X + 1 - \beta^2 = 0$$

نلاحظ أنه يوجد حل  $X=1$  :

|                                                                 |                  |
|-----------------------------------------------------------------|------------------|
| $X^3 - (2\beta + 1)X^2 + (\beta^2 + 2\beta - 1)X + 1 - \beta^2$ | $n-1$            |
| $\cdot X^3 + X^2$                                               | $X^2 - 2\beta X$ |
| $-2\beta X^2 + (\beta^2 + 2\beta - 1)X$                         | $+ \beta^2 - 1$  |
| $2\beta X^2 - 2\beta X$                                         |                  |
| $(\beta^2 - 1)X + (1 - \beta^2)$                                |                  |
| $(\beta^2 - 1)X + (1 - \beta^2)$                                |                  |
| $0$                                                             |                  |

نلاحظ المعادلة

$$X^2 - 2\beta X + \beta^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 4\beta^2 - 4(\beta^2 - 1) = 4$$

$$X = \frac{2\beta - 2}{2(1)} = \beta - 1$$

$$X = \frac{2\beta + 2}{2} = \beta + 1$$

د. ب. ك. ي. ، صفحة الأستاذ فلول

للرياضيات

٣- اقسام قيمة العدد الحقيقي  $t$  :

قيمة عددية عظمى للالة  $f$  هي  $\frac{1}{2}$  من

أجل  $n = \frac{1}{4}$  و  $(1-t)^2 = \frac{1}{4}$

$$(1-t) = \frac{1}{2} \quad \text{أي} \quad \sqrt{(1-t)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

$$\vec{AG}_t = (1-t^2) \vec{ADE} \quad \text{③}$$

ك مرجع المحاور معطاة :

$$(1-t) \vec{D}_E \vec{B} + 2t \vec{D}_E \vec{C} = \vec{0}$$

لدينا :

$$\vec{AG}_t = (1-t)^2 \vec{AD}_E + 2t(1-t) \vec{AC}$$

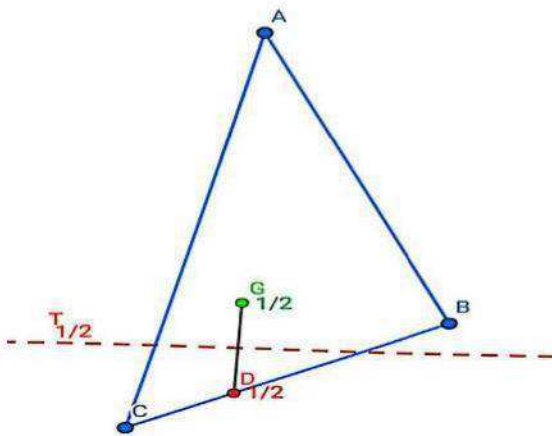
$$= (1-t)^2 \vec{AD}_E + (1-t)^2 \vec{D}_E \vec{B} + 2t(1-t) \vec{AD}_E + 2t(1-t) \vec{D}_E \vec{C}$$

$$= [(1-t)^2 + 2t(1-t)] \vec{AD}_E + (1-t)^2 \vec{D}_E \vec{B} + 2t(1-t) \vec{D}_E \vec{C}$$

$$= (1-t^2) \vec{AD}_E + (1-t) [(1-t) \vec{D}_E \vec{B} + 2t \vec{D}_E \vec{C}]$$

$$= (1-t^2) \vec{AD}_E \quad \text{حيث} \quad \vec{D}_E \vec{B} + 2t \vec{D}_E \vec{C} = \vec{0}$$

بناءً على النقطة  $D_{1/2}$  و  $G_{1/2}$  :



$$t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = \frac{4(1-t)}{3} (1-t+2t) \quad \text{④}$$

نأخذ المعادلة :  $t = 0$  أو  $t = 1$  مع  $t = 0$  معطاة

٣- قيمة العدد الحقيقي  $t$  :

$t$  تنتمي الى المشتق  $n = y$  معطاة

$$2t(1-t) = (1-t)^2$$

$$2t(1-t) - (1-t)^2 = 0 \quad \text{أي}$$

$$(1-t)(2t - (1-t)) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad \text{أو} \quad t = \frac{1}{2}$$

٤- مجموعة النقطة :

صفحة الأستاذ فلول

للرياضيات

$$\begin{cases} n = (1-t)^2 \\ y = 2t(1-t) \end{cases} \quad \text{①}$$

$$y = 2t(1-t) - 4$$

مع العلاقة ① لدينا :

$$\sqrt{n} = |(1-t)| \quad \text{أي} \quad n = (1-t)^2$$

$$\text{أي} \quad t = 1 - \sqrt{n} \dots$$

نلاحظ  $t$  هي  $y$  أو العلاقة ② :

$$y = 2(1-\sqrt{n})(1+\sqrt{n})$$

$$y = 2(\sqrt{n} - n)$$

وبالتالي مجموعة النقطة هي مدعومة

$$\text{معادلة} \quad y = 2(\sqrt{n} - n)$$

٥- دراسة نضبات الالة  $f$

$$f'(n) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \quad \text{مع} \quad n \neq 0$$

ندرس إشارة المشتقة :

$$f'(n) = 0 \quad \text{مع} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 = 0 \quad \text{مع} \quad n \neq 0$$

$$\text{أي} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} = 2 \quad \text{أي} \quad \sqrt{n} = \frac{1}{2} \quad \text{أي} \quad n = \frac{1}{4}$$

جدول النضبات :

| $n$     | 0 | $\frac{1}{4}$             | 1 |
|---------|---|---------------------------|---|
| $f'(n)$ |   |                           |   |
|         |   | $\rightarrow \frac{1}{2}$ |   |
| $f(n)$  | 0 |                           |   |