

مسألة :

- لتكن الدالة f المعرفة على $]2, +\infty[\cup]-\infty, -4]$ بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$:

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1)- بين أن المستقيم الذي معادلته : $x = -1$ هو محور تناظر لـ (C_f) .

(2)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -4} \left[\frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} \right]$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right]$. ماذا نستنتج ؟

- فسر النتيجةين بيانيا .

(3)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(4)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x + 1]$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1]$. فسر النتيجةين بيانيا .

(5)- ادرس اتجاه تغير الدالة f على D_f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(6)- أنشئ (C_f) .

(7)- لتكن الدالة g المعرفة $\mathbb{R}$ على بـ : $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(أ)- بين أن (C_g) يطابق (C_f) على مجال D_1 يطلب تعيينه .

(ب)- بين أنه على مجال D_2 يطلب تعيينه (C_g) هو نصف دائرة يطلب تعيين مركزها W و نصف قطرها r .

(ج)- أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق .

الإجابة النموذجية + سلم التقييم :

(1-) من أجل كل x من D_f ، $-2-x \in D_f$ ، نبرهن أن : $f(-2-x) = f(x)$

$$f(-2-x) = \sqrt{(-2-x)^2 + 2(-2-x) - 8} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4 - 2x - 8} = f(x)$$

ومنه : المستقيم الذي معادلته : $x = -1$ هو محور تناظر لـ (C_f) (01 ن)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \left[\frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} \right] &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 2x - 8}} \\ \lim_{x \rightarrow -4} \left[\frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} \right] &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 2x - 8}} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} \end{aligned} \quad (2-)$$

(01.5 ن) $\lim_{x \rightarrow -4} \left[\frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} \right] = -\infty$: ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4} (x - 2) = -6 \\ \lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 0^+ \end{cases}$

f غير قابلة للإشتقاق من اليسار عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -4$ (0.5 ن)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{(x - 2)\sqrt{x^2 + 2x - 8}} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x - 2)\sqrt{x^2 + 2x - 8}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} \end{aligned}$$

(01.5 ن) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right] = +\infty$: ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} (x + 4) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 0^+ \end{cases}$

f غير قابلة للإشتقاق من اليمين عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$ (0.5 ن)

التفسير البياني : (01 ن) (01 ن)

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي معادلته : $x = -4$ عند النقطة $A(-4, 0)$.

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي معادلته : $x = 2$ عند النقطة $B(2, 0)$.

$$(3) \text{ من أجل كل من } D_f : f(x) = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}$$

$$(01 \text{ ن}) \dots \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = +\infty$$

$$(01 \text{ ن}) \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x + 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 8 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8} - (x + 1)}$$

$$(01 \text{ ن}) \dots \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x + 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 + 2x - 8} - (x + 1)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 8 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8} + (x + 1)}$$

$$(01 \text{ ن}) \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 + 2x - 8} + (x + 1)} = 0$$

التفسير البياني : (01 ن) (01 ن)

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (T_2) معادلته : $y = -x - 1$ بجوار $-\infty$.

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (T_1) معادلته : $y = x + 1$ بجوار $+\infty$.

$$(5) \text{ } f \text{ قابلة للإشتقاق على } D_f : f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x - 8}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ : } x = -1.$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	//		+

f متزايدة تماما على المجال : $]2, +\infty[$. f متناقصة تماما على المجال : $]-\infty, -4[$. (01 ن)

- جدول تغيرات الدالة f : (01ن)

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$f'(x)$		-		+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

(7-) على المجال $D_1 =]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$ ، $g(x) = f(x)$: (01ن)

$$g(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 8} = y \quad (y \geq 0) : D_2 = [-4, 2]$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 8 \quad (y \geq 0) , \quad -x^2 - 2x + 8 = y^2 \quad (y \geq 0)$$

(01ن)..... $r = 3$ و نصف قطرها $w(-1, 0)$ هو نصف دائرة مركزها (Cg) و منه $(x+1)^2 + y^2 = 9$

(6-) إنشاء (C_f) و (C_g) : (02ن)

