

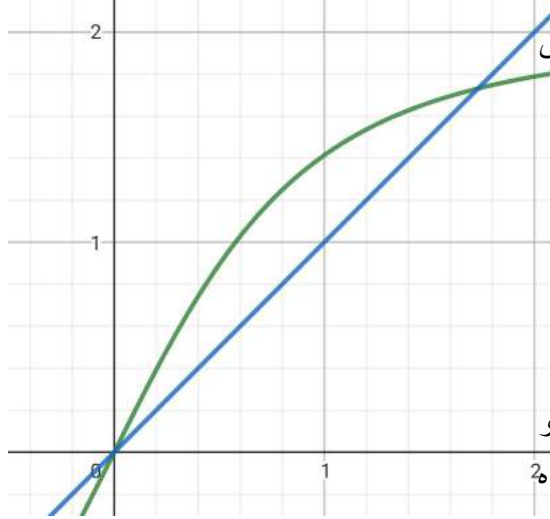


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$



ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل)

(1)- أدرس إتجاه تغير الدالة f .

(ب)- بين أنه إذا كان $x \in [1; \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$

(2)- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ،

(أ)- برر وجود المتتالية (u_n) .

(ب)- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و

u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ثم ضع تخمينا حول اتجاه

تغير المتتالية (u_n) وتقاربا .

(ج)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < \sqrt{3}$

(3)- (أ)- بين أنه من أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

(ب)- استنتج أنها متقاربة

(4)- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

(أ)- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول.

(ب)- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج)- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{3 - u_0^2} + \frac{1}{3 - u_1^2} + \dots + \frac{1}{3 - u_n^2}$

(د)- أحسب بدلالة n المجموع P_n حيث : $P_n = \frac{1}{2}v_0 \times \frac{1}{2}v_1 \times \dots \times \frac{1}{2}v_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1)- نعتبر المعادلة : $(E) \quad 9x - 4y = 22$. ذات المجهول (x, y) حيث x و y عدنان صحيحان

(2)- (أ)- بين أن المعادلة (E) تقبل حولا .

(ب)- بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 2 [4]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

(3)- N عدد طبيعي يكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في نظام التعداد ذي الأساس 4 ويكتب $\overline{56\alpha0}$ في النظام ذي الأساس 7 حيث α و β عدنان

طبيين

* عين α و β ، ثم أكتب N في النظام العشري .

(4)- نضع $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ ، حيث n عدد طبيعي .

(أ)- تحقق أن الثنائية $(a; b)$ حل للمعادلة (E) .

(ب)- باستعمال مبرهنة بيزو بين أن العددين $4n + 1$ و $9n + 2$ أوليان فيما بينهما.

(ج)- جد $\text{pgcd}(a, b)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون جمعية من 8 رجال و 4 نساء من بينهم رجل واحد اسمه محمد وامرأة واحدة اسمها فاطمة ، نريد تشكيل لجنة مكونة من : رئيس ، نائب وكاتب .

- (1)- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها
- (2)- احسب احتمال كل من الأحداث التالية :
A " اللجنة تتكون من أعضاء من نفس الجنس "
B " اللجنة تضم رجلين وامرأة "
C " اللجنة تضم محمد في منصب الرئيس "
- (3)- علما أن اللجنة تضم رجلين وامرأة ، ماهو احتمال أن يكون فيها محمد في منصب الرئيس ؟
- (4)- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة
أ)- عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي ثم عرف قانون احتماله
ب)- أحسب $E(X)$
د)- أحسب الاحتمال $P(\ln X(3e^X - 3) > 0)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+1}e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1)- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -1 بقيم أكبر ، ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .
- (2)- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
- (3)- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (4)- نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$
- بين أن (Δ) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
- (5)- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- (6)- أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .
- (7)- أ)- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-1; +\infty[$ ، $x + 1 \leq e^x$.
ب)- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-1; +\infty[$ ، $f(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.
- (8)- نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda \geq 1$ ، ولتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيات التي معادلاتها $x = 1$ ، $x = \lambda$ و $y = 0$.
- بين أن $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

(II)- ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+1}e^{-\frac{x}{n}}$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1)- بين ان جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين احداثيتيهما .
- (2)- أ)- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، المنحنيات (C_n) تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في نقطة M_n فاصلتها α_n
ب)- ادرس طبيعة المتتالية (α_n) .
- (3)- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام -1 ، -1 ، 0 و 1 وكريتان خضراوين تحملان الرقمين -1 و 0 وكرة سوداء تحمل الرقم 1 (كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس).

(I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من هذا الصندوق

(1)- احسب احتمال الحوادث الآتية :

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " .

B " الحصول على كريتين تحمل نفس الرقم " .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمان الظاهران في الكريتان المسحوبتان من الصندوق .

(2)- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

(3)- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم استنتج $E(1444X + 2023)$.

(II) نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الصندوق ونضيف له n كرة سوداء كلا منها تحمل الرقم 1 ،

ثم نسحب منه كريتين على التوالي بدون إرجاع

(1)- ماهو عدد الحالات الممكنة ؟

(2)- احسب احتمال الحوادث الآتية :

C " الحصول على كريتين من نفس اللون " .

D " الحصول على كريتين تحمل كلا منهما رقم موجب تماما " .

E " الحصول على كريتين تحملان رقمين مختلفين تماما في الإشارة " .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D

التي لواحقتها على الترتيب $1 + \sqrt{3} + i$ ، $1 + 2i$ ، 1 ، $1 + \sqrt{3} + i$ ، Z_D و $\overline{Z_C}$

(1) أ- أكتب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم فسر النتيجة هندسيا $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- استنتج طبيعة التحويل R الي مركزه A ويحول النقطة B إلى C ، يطلب تعيين عبارته المركبة

(2)- حدد طبيعة الرباعي $ABCD$ ، ثم احسب مساحته .

(3)- لتكن Z_K لاحقة النقطة K صورة النقطة E ذات اللاحقة i بواسطة التحويل R .

- بين أن : $\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})} + 1$ Z_K ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos(\frac{5\pi}{12})$ و $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

(4)- أكتب العبارة المركبة للتحاكي H الذي مركزه A ونسبته -3 .

(5)- أ- أكتب العبارة المركبة للتحويل $H \circ R$ محددا طبيعته وعناصره المميزة.

ب- ليكن $AB'CD$ صورة الرباعي $ABCD$ بالتحويل S .

- بين أن مساحة الرباعي $AB'CD$ هي $18\sqrt{3}$ (مقدرة بوحدة المساحات) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ و المعرفة على } \mathbb{N} \text{ ب:}$$

- (1) - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n < 1$
- (2) - أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .
- (3) - لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{4}{1 - u_n}$
- (أ) - بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 4 ، ثم احسب حدها الأول.
- (ب) - أكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- (4) - (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .
- (ب) - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $2023^{1444} + 1444^{2023} + 2023^{v_n}$ على 5 .
- (ج) - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:
$$\begin{cases} n \equiv 2023[4] \\ v_n - 3^n \equiv 1444[5] \end{cases}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$

(1) (أ) - تحقق أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2) - 2$

(ب) - أحسب نهاية الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) (أ) - أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(ب) - استنتج من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ إشارة $g(x)$.

(II) - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x - 1$ y مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

(4) - ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(5) - اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1 .

(6) - ارسم المستقيم (Δ) و المماس (T) والمنحنى (C_f) .

(7) - لتكن (d_m) عائلات المستقيمت المعرفة بـ $mx - m$ y حيث m وسيط حقيقي .

(أ) - تحقق أن جميع المستقيمت (d_m) تمر بالنقطة A

(ب) - عين قيم الوسيط m حتى يكون للمعادلة $mx - m$ $f(x)$ حلان متميزان .

(III) (1) - باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أن: $1 - \frac{2}{e} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

(2) - احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = e$ (يجب تقديم قيم مضبوطة لمساحة الحيز)

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا 2023