



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: رياضيات

دورة: 2022

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أ- عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
ب- بيّن أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $6^{2n} \equiv 1[7]$ ثمّ استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 6^n على 7
- (2) بيّن أنّ العدد $2 - (2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954}$ يقبل القسمة على 7
- (3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
أ- استنتج، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7
ب- بيّن أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$
ج- أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$ ثمّ استنتج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل في كلّ حالة من الحالات التالية:
- (1) α و β عددان حقيقيان غير معدومين. (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان بـ :
 $u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $5u_{n+1} = u_n + \alpha$ و $v_n = u_n + \beta$
- المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha = -4\beta$
 - (2) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \ln \sqrt{e^{n \cdot \ln 2}}$ هي متتالية حسابية أساسها $\ln \sqrt{2}$
 - (3) x عدد صحيح. إذا كان $x \equiv 3[7]$ و $x \equiv 1[3]$ فإنّ $x \equiv 3[21]$
 - (4) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ دالة فردية.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- f الدالة العددية المعرّفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{2x + 1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل المرفق.
- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

ب- انقل الشكل ومثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 وضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n)

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < 5$

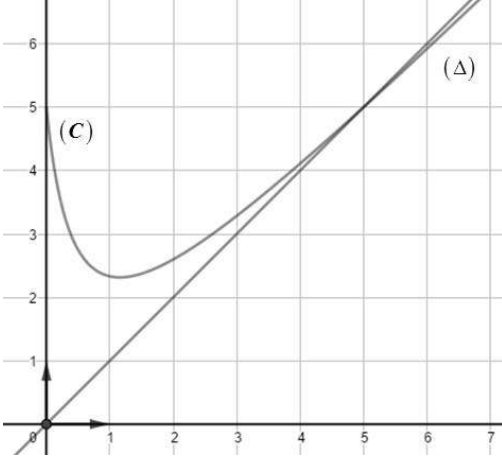
ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$5 - u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} (5 - u_n)$$

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{2u_n}{2u_n + 1} \leq \frac{10}{11}$

ب- استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ثم احسب $0 < 5 - u_n \leq 3 \left(\frac{10}{11} \right)^n$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - x^2}{x - 1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$ ، $f'(x) = \frac{(x-2)(e^x - x)}{(x-1)^2}$

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -x - 1$

(4) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة 0

(5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$

ب- أنشئ (T)، (Δ) و (C)

(6) ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد إشارة حلول المعادلة: $\frac{e^x - x^2 + x - 1}{x - 1} = mx$

(7) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = \frac{|e^x - x^2|}{x - 1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم أنشئ (C_g)

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي. نضع: $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

$$(1) \text{ أ- بيّن أنّ } \text{pgcd}(A_n; B_n) = \text{pgcd}(B_n; 7)$$

ب- إستنتج القيم الممكنة لـ $\text{pgcd}(A_n; B_n)$

ج- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما.

(2) نعتبر المعادلة $A_2x - B_2y = 29 \dots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ- بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$

ب- عيّن حلول المعادلة (E)

$$(3) \text{ أ- إستنتج حلول المعادلة } (E') : 51x - 4y = 45 \dots$$

ب- عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة والموجبة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{ax}{x+b} + \ln(x+b)$

حيث a و b عدنان حقيقيان مع b موجب تماماً. تمثيلها البياني (C) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ يقبل حامل محور الفواصل مماساً له في النقطة O

$$(1) \text{ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي } x \text{ من }]-1; +\infty[, f(x) = -1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$$

$$(2) g \text{ الدالة العددية المعرفة على }]-1; +\infty[\text{ كما يلي: } g(x) = (x+1)\ln(x+1)$$

أحسب $g'(x)$ ثمّ إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$

$$(3) (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ : } u_n = \int_{n-1}^n f(x) dx$$

أ- أحسب u_{2022} ثمّ فسّر النتيجة بيانياً.

ب- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}$ و $v_n = u_n - 1$

$$(1) \text{ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي } n , v_{n+1} = -\frac{1}{3}(v_n)^2$$

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $-3 \leq v_n < 0$

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج أن (v_n) متقاربة.

(4) (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n = \ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)$

أ- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدّها الأول w_0

ب- أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث $P_n = \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{v_1} \times \dots \times \frac{1}{v_n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) h الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x + \ln x$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة h

(2) أ- بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$

ب- استنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$

(II) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - x \ln x + (\ln x)^2$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً ، $f'(x) = \frac{(2-x)h(x)}{x}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha(\alpha+2)$ ثم عيّن حصرًا لـ $f(\alpha)$

(4) g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$

أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g واحسب $g(1)$

ب- بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيها.

ج- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (C) في النقطة A

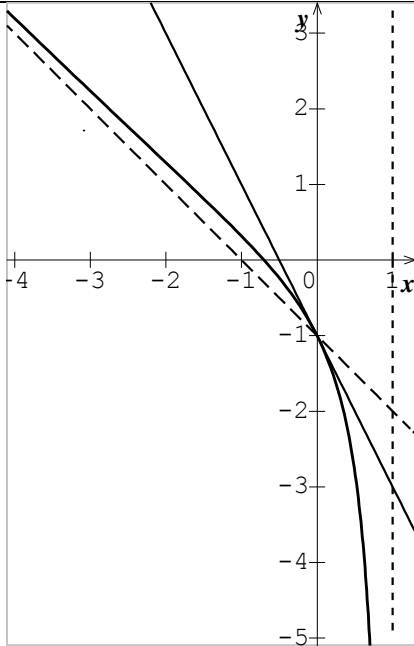
(5) أنشئ (T) و (C) في المجال $]0; 5]$

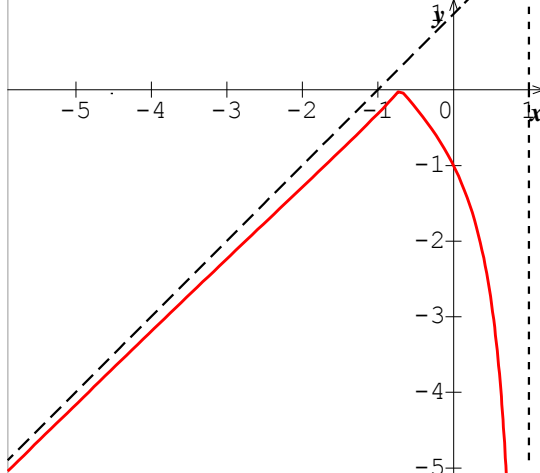
(6) k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x) = f(e^{-x})$

أ- دون حساب عبارة $k(x)$ ، ادرس اتجاه تغير الدالة k ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$

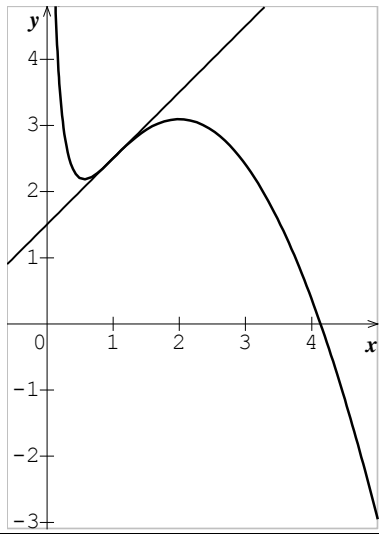
ب- شكّل جدول تغيرات الدالة k

التمرين الثالث: (05 نقاط)											
1.75	0.25 0.5	$f(x) - x = \frac{5-x}{2x+1} - 1$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>الوضعية</td><td>(C) أعلى (Δ)</td><td colspan="2">(C) أسفل (Δ)</td></tr></table>	x	0	5	$+\infty$	الوضعية	(C) أعلى (Δ)	(C) أسفل (Δ)		1
	x	0	5	$+\infty$							
	الوضعية	(C) أعلى (Δ)	(C) أسفل (Δ)								
	0.25×3		ب- تمثيل الحدود								
0.25		التخمين: (u_n) متزايدة تماما									
1.5	0.5+0.25	أ - البرهان بالتراجع لدينا $2 \leq u_0 < 5$ وإذا كان $2 \leq u_n < 5$ فإن $f(2) \leq f(u_n) < f(5)$ أي $\frac{13}{5} \leq u_{n+1} < 5$ ومنه $2 \leq u_{n+1} < 5$	2								
	0.5 0.25	ب - لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{5-u_n}{2u_n+1} > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة									
	0.5	$5 - u_{n+1} = 5 - \frac{2u_n^2+5}{2u_n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$	3								
1.25	0.5	أ - $\frac{2u_n}{2u_n+1} - \frac{10}{11} = \frac{2(u_n-5)}{11(2u_n+1)} \leq 0$	4								
	0.5 0.25	ب - لدينا $0 < 5 - u_{n+1} \leq \frac{10}{11}(5 - u_n)$ ومنه $0 < 5 - u_n \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$									

التمرين الرابع: (07 نقاط)																
0.5	0.25+0.25	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	1													
1.75	0.5	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$e(x)-1$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$e(x)-x$</td><td></td><td>1</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$e(x)-1$	-	0	+	$e(x)-x$		1		أ -	2
	x	$-\infty$	0	$+\infty$												
	$e(x)-1$	-	0	+												
	$e(x)-x$		1													
0.5	$f'(x) = \frac{(x-2)(e^x - x)}{(x-1)^2}$	ب -														
0.5	ج - f متناقصة تماما جدول التغيرات <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	1	$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$									
x	$-\infty$	1														
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$														
1	0.5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -1$	أ -	3												
	0.25	$y = -x - 1$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لـ (C) عند $-\infty$														
	0.25	ب - (C) أسفل (Δ) في المجال $[0;1[$ و (C) أعلى (Δ) في المجال $] -\infty; 0]$														
0.5	0.5	معادلة (T) : $y = -2x - 1$		4												
1.75	0.75	أ - مبرهنة القيمة المتوسطة		5												
	0.25		ب - إنشاء													
	0.25		(T)													
	0.5		(Δ)													
		(C)														

0.75	0.25	$f(x) = mx - 1$ تكافئ $\frac{e^x - x^2 + x - 1}{x - 1} = mx$					6
	0.5	m	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
		الحلول	حل موجب تماما وحل معدوم	حل معدوم	حل سالب تماما وحل معدوم	حل معدوم	
0.75	0.5	$\begin{cases} g(x) = -f(x) & : x \leq \alpha \\ g(x) = f(x) & : \alpha \leq x < 1 \end{cases}$					7
	0.25	 إنشاء (C_g)					
عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)							
التمرين الأول: (04 نقاط)							
1.5	0.5	أ لدينا. $A_n = (n^2 + 3n + 1)B_n + 7$ ومنه $\text{pgcd}(A_n; B_n) = \text{pgcd}(B_n; 7)$					1
	0.5	ب - $\text{pgcd}(A_n; B_n) \in \{1; 7\}$					
	0.5	ج - $\text{pgcd}(A_n; B_n) = 7$ تكافئ $n + 2 \equiv 0[7]$ اذن قيم n المطلوبة هي كل الأعداد الطبيعية ما عدا $7k + 5$ مع $k \in \mathbb{N}$					
1.5	0.75	أ -لدينا $51x - 4y \equiv 29[4]$ اي $3x \equiv 1[4]$ ومنه $x \equiv 3[4]$					2
	0.75	ب - الحلول : $(x; y) = (4k + 3; 51k + 31)$ مع $k \in \mathbb{Z}$					
1	0.5	أ $51x - 4(y + 4) = 29$ تكافئ $51x - 4y = 45$ و منه الحلول: $(x; y) = (4k + 3; 51k + 27)$ مع $k \in \mathbb{Z}$					3
	0.5	ب - $ y - 12x \leq 3$ تكافئ $2 \leq k \leq 4$ اذن الثنائيات هي $(11; 129)$ و $(15; 180)$ و $(19; 231)$					
التمرين الثاني: (04 نقاط)							
1	0.5+0.5	حيث $f(0) = 0$ و $f'(0) = 0$ تكافئ $\ln b = 0$ و $ab + \frac{1}{b} = 0$ ومنه $a = -1$ و $b = 1$ اذن $f(x) = -1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$					1

1.5	0.5 01	$g'(x) = 1 + \ln(x+1)$ $x \mapsto -2x + (x+2)\ln(x+1)$ دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$	2						
1.5	0.25 0.25	$u_{2022} = \int_{2021}^{2022} f(x) dx = -2 + 2024 \ln 2023 - 2023 \ln 2022$ - أ u_{2022} هو مساحة الحيز المحدد بـ (C) و المستقيمتان التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=2021$ ، $x=2022$	3						
	0.5	ب - $u_n = -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n$							
	0.5	ج - $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \ln(n+1) + \frac{n+1}{n} \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = +\infty$							
التمرين الثالث: (05 نقاط)									
1	01	$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -\frac{1}{3}(u_n - 1)^2 = -\frac{1}{3}(v_n)^2$	1						
1	01	البرهان بالتراجع	2						
0.75	0.25+0.25 0.25	$v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{3}v_n + 1 \right) > 0$ ومنه (v_n) متزايدة تماما (v_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة	3						
1.75	0.25+0.5	أ - $w_0 = \ln 3$ و $w_{n+1} = \ln \left(-\frac{3}{v_{n+1}} \right) = 2 \ln \left(-\frac{3}{v_n} \right) = 2w_n$	4						
	4x 0.25	ب - $u_n = -3^{1-2^n} + 1$ ، $v_n = -3^{1-2^n}$ ، $w_n = 2^n \ln 3$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$							
0.5	0.5	لدينا $\frac{1}{v_n} = -3^{2^n-1}$ ومنه $P_n = (-1)^{n+1} \times 3^{2^{n+1}-n-2}$	5						
التمرين الرابع: (07 نقاط)									
0.5	0.5	h متزايدة تماما على $]0; +\infty[$	I 1						
0.75	0.5	أ - تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة	2						
	0.25	ب - <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>		x	0	α	$+\infty$	$h(x)$	-
x	0	α	$+\infty$						
$h(x)$	-	0	+						
0.75	0.5+0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	II 1						
1	0.5	أ - $f'(x) = \frac{(2-x)h(x)}{x}$	2						
	0.25	ب - اتجاه التغير							

	0.25	x 0 α 2 $+\infty$ $f'(x)$ - 0 + 0 - $f(x)$ $+\infty$ $f(\alpha)$ $f(2)$ $-\infty$ جدول التغيرات f متزايدة تماما على $[\alpha; 2]$ ومتناقصة تماما على كل من $]0; \alpha]$ و $[2; +\infty[$	
0.5	0.25+0.25	$1,8 \leq f(\alpha) \leq 2,4$ و $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha(\alpha + 2)$	3
1.75	0.25+0.5	$g(1) = 0$ و $g'(x) > 0$. $g'(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x} - 1$	4
	0.25+0.25	ب- لدينا $f''(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ، f'' تتعدم عند 1 و تغير اشارتها و بالتالي نقطة انعطاف $A\left(1; \frac{5}{2}\right)$	
	0.5	ج- معادلة المماس (T) هي : $y = x + \frac{3}{2}$	
0.75	0.5+0.25	 إنشاء (T) و (C) في المجال $]0; 5]$	5
1	0.25	أ- $k'(x) = -e^{-x} f'(e^{-x})$	6
	0.25	f متناقصة تماما على $[-\ln 2; -\ln \alpha]$ و متزايدة تماما على كل من $[-\ln \alpha; +\infty[$ و $]-\infty; -\ln 2]$	
	0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$	
	0.25	x $-\infty$ $-\ln 2$ $-\ln \alpha$ $+\infty$ $k'(x)$ + 0 - 0 + $k(x)$ $-\infty$ $f(2)$ $f(\alpha)$ $+\infty$ ب-	