

فرض تدريبي للفصل الثاني

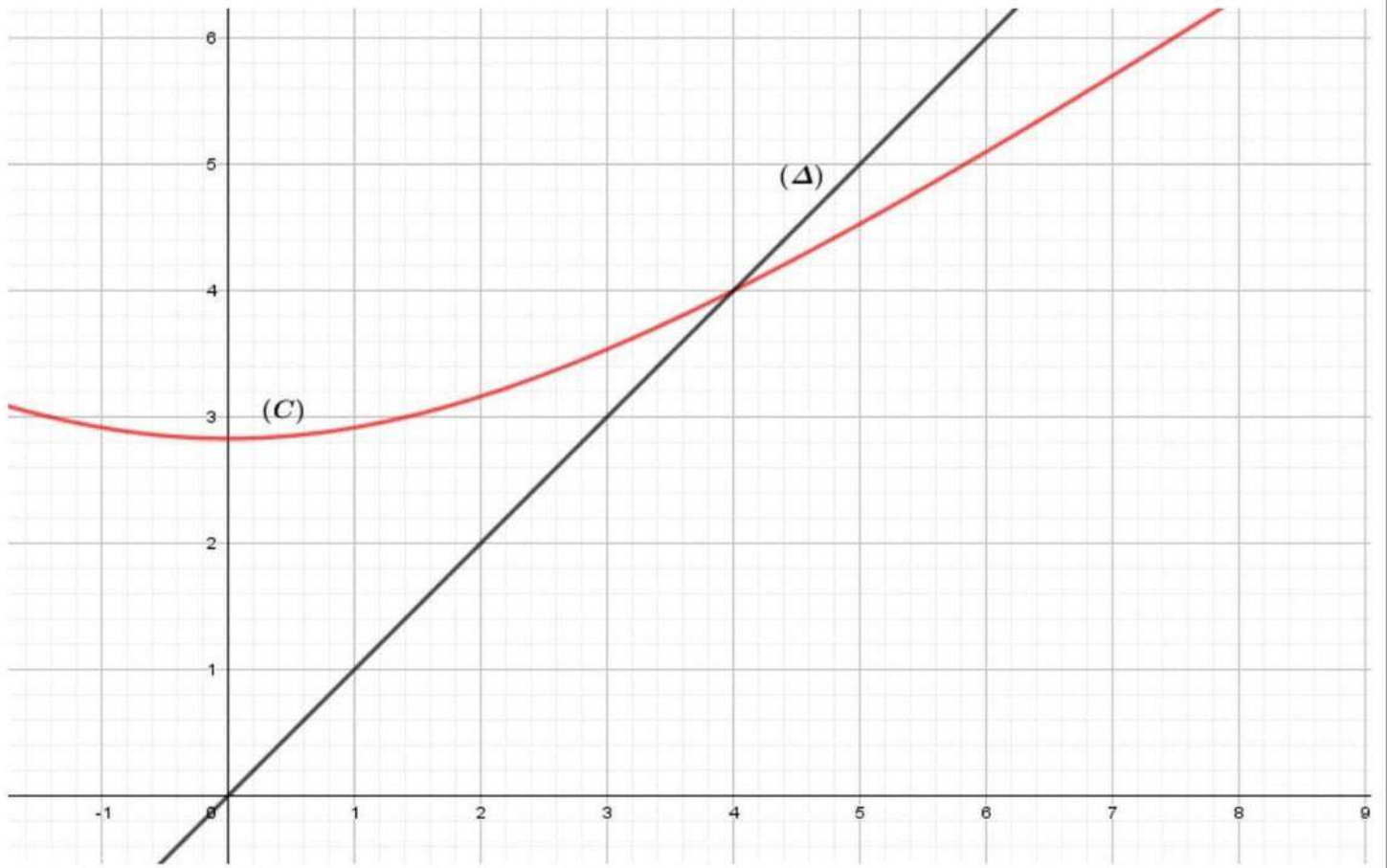
التمرين الأول : (المتتاليات العددية)

- 1) في الشكل أدناه (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 8}$.
 و (Δ) المستقيم ذا المعادلة : $y = x$. (أنظر الوثيقة المرفقة)
 أ- ادرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها في المجال $[0;4]$.
 ب- بين أنه إذا كان : $x \in [0;4]$ فإن : $f(x) \in [0;4]$.
 2) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
 أ- مثل على حامل محور القواصل الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، ثم أعط تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .
 ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 < u_n < 4$.
 ج- ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .
 3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = 16 - u_n^2$.
 أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
 ب- عبر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n وأحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 4) احسب بدلالة n كلا من المجموعين : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.
 5) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_n - 4| < \frac{|v_n|}{4}$.
 ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

التمرين الثاني : (الإحتمالات)

- يحتوي كيس غير شفاف على 5 كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 و كريتين بيضاوين تحملان الرقمين : 1 ، 3 و كريتين خضراوين تحملان الرقمين : 2 ، 3 . الكريات كلها متماثلة ولا يمكن التمييز بينها عند اللمس .
 I) نسحب عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد من الكيس .
 1) احسب إحتمال كل حدث من الأحداث التالية :
 A : "الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم" ، B : "الكريات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى" .
 C : "الأرقام المسحوبة مختلفة مثنى مثنى" .
 2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب بأكبر الأرقام المسحوبة .
 أ- ماهي قيم X الممكنة ؟
 ب- اكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
 II) ننزع الآن الكريات الحمراء من الكيس ثم نقوم بسحبات على التوالي لكريّة واحدة مع الإرجاع و ليكن عدد هذه السحبات n .
 1) احسب إحتمال كل من الحدثين :
 D : "كل الكريات المسحوبة بيضاء" ، E : "يوجد على الأقل كريّة خضراء في كل السحبات" .
 2) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون : $P(E) \geq 0,999$.

الوثيقة المرفقة بالتمرين الأول



حل مقترح للتمرين الأول : (المتتاليات العددية)

1) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 8}}$

x	0	4
$f'(x)$		+
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	4

على المجال $[0;4]$ لدينا : $f'(x) > 0$ ومنه : الدالة f متزايدة تماما على $[0;4]$.

ب- لدينا : $x \in [0;4]$ أي : $0 \leq x \leq 4$ ومنه : $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ أي نجد :

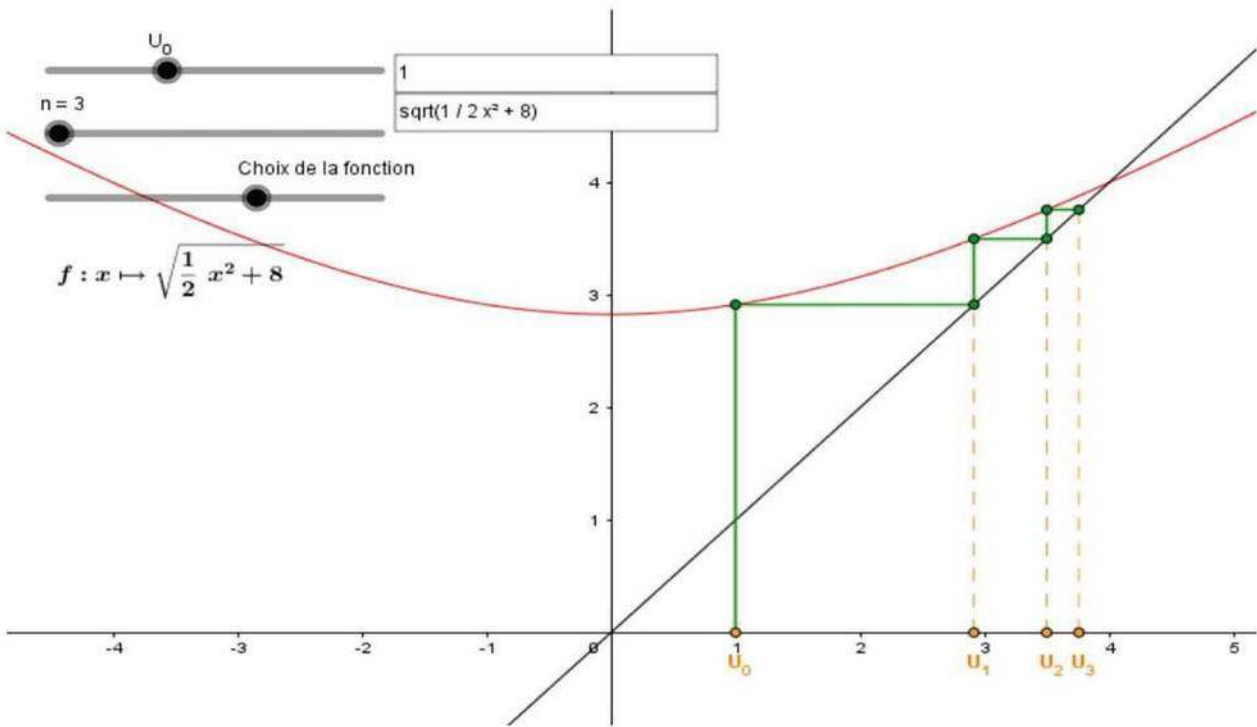
$0 \leq 2\sqrt{2} \leq f(x) \leq 4$ (الدالة f متزايدة تماما على $[0;4]$) .

إذن : من أجل $x \in [0;4]$ فإن : $f(x) \in [0;4]$.

2) لدينا : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} \end{cases}$

أ- التمثيل :

أستاذ المادة : الأستاذ بلقاسم عبدالرزاق



- نلاحظ أن : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة ونلاحظ أن حدودها تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C) و المستقيم (d) .

ب- لنستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 < u_n < 4$ $P(n)$.

- لنتحقق من صحة $P(n)$ من أجل $n=0$: $u_0 = 1$ و $0 < 1 < 4$ إذن : $0 < u_0 < 4$ (محقة) .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $0 < u_n < 4$ ونثبت صحة $P(n)$ من أجل $n+1$ أي : $0 < u_{n+1} < 4$.

لدينا فرضا أن : $0 < u_n < 4$ بما أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;4]$ فإن : $f(0) < f(u_n) < f(4)$ ومنه نجد :

$0 < 2\sqrt{2} < u_{n+1} < 4$ أي : $0 < u_{n+1} < 4$ وأخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 < u_n < 4$.

ج- نحسب : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} + u_n\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} + u_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 + 8 - u_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} + u_n} = \frac{-\frac{1}{2}u_n^2 + 8}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} + u_n}$

$$\cdot u_{n+1} - u_n = \frac{-\frac{1}{2}(u_n^2 - 16)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8 + u_n}} = \frac{-\frac{1}{2}(u_n - 4)(u_n + 4)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8 + u_n}} \text{ أي :}$$

لدينا : $u_n + 4 > 0$ و $u_n - 4 < 0$ أي : $-\frac{1}{2}(u_n - 4) > 0$ ونعلم أن : $\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8 + u_n} > 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

- المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

(3) لدينا : $v_n = 16 - u_n^2$.

أ- لدينا : $v_{n+1} = 16 - u_{n+1}^2$ أي : $v_{n+1} = 16 - \frac{1}{2}u_n^2 - 8$ أي : $v_{n+1} = 8 - \frac{1}{2}u_n^2$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(16 - u_n^2)$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

بالتالي فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 15$.

ب- نجد : $v_n = 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ولدينا : $v_n = 16 - u_n^2$ ومنه : $u_n = \sqrt{16 - v_n}$ ، إذن : $u_n = \sqrt{16 - 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{16 - 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

(4) حساب المجاميع :

لدينا : $S_n = 15 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$ ومنه : $S_n = 30 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

لدينا : $v_n = 16 - u_n^2$ أي : $u_n^2 = 16 - v_n$ ومنه يصبح : $S'_n = (16 - v_0) + (16 - v_1) + \dots + (16 - v_n)$ أي نجد :

$S'_n = 16(n+1) - 30 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ ، إذن : $S'_n = 16(n+1) - S_n$ ومنه : $S'_n = (16 + 16 + \dots + 16) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$.

(5) أ- لدينا : $v_n = 16 - u_n^2$ أي : $v_n = (4 - u_n)(4 + u_n)$ ومنه : $4 - u_n = \frac{v_n}{4 + u_n}$ ، إذن : $|4 - u_n| = \frac{|v_n|}{|4 + u_n|}$.

ونعلم أن : $0 < u_n < 4$ أي : $4 < 4 + u_n < 8$ ومنه : $|4 + u_n| = 4 + u_n$ وأيضا : $|4 - u_n| = |u_n - 4|$.

إذن : $|u_n - 4| = \frac{|v_n|}{u_n + 4}$.

لدينا : $u_n > 0$ أي : $u_n + 4 > 4$ ومنه : $\frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{4}$ أي : $\frac{|v_n|}{u_n + 4} < \frac{|v_n|}{4}$ وبالتالي : $|u_n - 4| < \frac{|v_n|}{4}$ هو المطلوب .

ب- لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = 0$ بالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 4| = 0$ أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

حل مقترح للتمرين الثاني : (الإحتمالات)

I (عدد الحالات الممكنة للسحب هو : $C_9^3 = 84$.

1 (حساب إحتمال الأحداث :

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_3^3}{84} = \frac{3}{84} \text{ ومنه : } P(A) = \frac{1}{28}$$

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{84} = \frac{5 \times 2 \times 2}{84} = \frac{20}{84} \text{ ومنه : } P(B) = \frac{5}{21}$$

$$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{84} = \frac{3^3}{84} = \frac{27}{84} \text{ ومنه : } P(C) = \frac{9}{28}$$

2 (المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب بأكبر الأرقام المسحوبة :

أ- قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ، 2 و 3 .

ب- قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

$$P(X=2) = \frac{(C_3^2 \times C_3^1) + (C_3^1 \times C_3^2) + C_3^3}{84} = \frac{9+9+1}{84} = \frac{19}{84} , \quad P(X=1) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$$

$$P(X=3) = \frac{2(C_3^2 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_3^2) + (C_3^1)^3 + C_3^3}{84} = \frac{18+18+27+1}{84} = \frac{64}{84}$$

- حساب الأمل الرياضي :

$$E(X) = \frac{1+38+192}{84} = \frac{231}{84} = 2,75 \text{ ومنه : } E(X) = 2,75$$

X_i	1	2	3
$P(X=i)$	$\frac{1}{84}$	$\frac{19}{84}$	$\frac{64}{84}$

II (الكيس أصبح يحوي كريتتين بيضاوين و كريتتين خضراوين :

1 (حساب إحتمال الأحداث :

$$P(D) = \frac{2^n}{4^n} = \left(\frac{2}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n , \quad P(E) = 1 - P(D) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ (} E \text{ هو الحدث العكسي لـ } D \text{) .}$$

2 (لدينا : $P(E) \geq 0,999$ أي : $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,999$ أي : $-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq -0,001$ ومنه : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,001$ أي نجد :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(0,001) \text{ ومنه : } n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(0,001) \text{ أي : } n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5)} \text{ ومنه : } n \geq 9,9657$$

بالتالي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث يكون : $P(E) \geq 0,999$ هي : 10 .