

واجب منزلي حول المرجح

الأستاذ: قويسم الخليل

المستوى: ثانية ثانوي - شعبة رياضيات

يعاد يوم: 08 جانفي 2023

سلم يوم: 21 ديسمبر 2022

التمرين 01

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس

 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(0; 1)$ ، $B(0; 5)$ و $C(2; 1)$ ولتكن G_m مرجح الجملة $\{(A; -m^2 + 4); (B; m^2 - 2m); (C; 2m)\}$ 1 عيّن قيم m التي من أجلها يكون G_m موجودة ووحيدة2 عيّن إحداثيي النقطة G_m بدلالة m 3 ما هو المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$

التمرين 02

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس

 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(1; 0)$ ، $B(-3; 2)$ و $C(1; 3)$ ولتكن G مرجح الجملة $\{(A; -2); (B; 1); (C; -1)\}$ 1 عيّن إحداثيي النقطة G 2 عيّن إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$

متوازي أضلاع

3 عيّن الأعداد الحقيقية α ، β و γ حتى تكون النقطة D مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$ 4 عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\| -2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} \| = 2\| \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} \|^2$$

5 m عدد حقيقي، نعتبر النقطة H المعرفة بالعلاقة:

$$(m+2)\vec{HA} - \vec{HB} + (m-3)\vec{HC} = \vec{0}$$

أ/ عيّن قيم m حتى تكون النقطة H موجودةب/ عبر عن $\vec{AH}$ بدلالة m و $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ج/ عيّن إحداثيي النقطة H بدلالة m د/ عبر عن قيم m بحيث تكون النقطة H من المستقيم

$$(D) \text{ ذو المعادلتين: } 2x - y = 0$$

التمرين 03

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ A ، B و C ثلاث نقط ليست على استقامة، النقطة G مرجحالجملة المثلثة $\{(B; 1); (C; 2)\}$

$$\vec{HA} + 3\vec{HB} + 2\vec{BC} = \vec{0}$$
 نقطة معرفة بالعلاقة:

1 أنشئ النقطة G 2 بيّن أن النقطة H مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$ ، ثم أنشئها3 بيّن أن النقط A ، G و H في استقامة4 (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\| \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \frac{3}{4} \| \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} \|^2$$

أ/ عيّن وأنشئ المجموعة (Γ) ب/ عيّن وأنشئ المجموعة (Γ') حيث:

$$\| \vec{MB} + 2\vec{MC} \| \leq \frac{3}{4} \| \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} \|^2$$

5 $(0; 2)$ ، $(-3; 0)$ و $(2; 1)$ هي إحداثيات النقط A ، B و C

على الترتيب

أ/ عيّن إحداثيي كلا من النقطتين G و H

ب/ تأكد حسابيا من صحة نتيجة السؤال 3

التمرين 04

 A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامة، m عدد حقيقي من المجال $[-1; 1]$ G_m مرجح الجملة $\{(A; m^2 + 1); (B; m); (C; -m)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$ 1 أنشئ G_1 و G_{-1} 2 برر وجود G_m من أجل عدد حقيقي m من المجال $[-1; 1]$ ، ثم بيّن أن

$$\vec{AG_m} = \frac{-m}{m^2 + 1} \vec{BC}$$

3 لتكن N نقطة من (BC) ، هل يمكن أن تنطبق N على G_m ؟ علل4 شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-1; 1]$ بـ:

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

5 استنتج مجموعة النقط G_m عندما يسمح m المجال $[-1; 1]$

عطلة سعيدة ، وبالتوفيق

تصحيح مقترح للواجب المنزلي حول المرجح

الأستاذ: قويسم الخليل

المستوى: ثانية ثانوي - شعبة رياضيات

ومنه:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\Rightarrow \begin{cases} -4 = 1 - x_D \\ 2 = 3 - y_D \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

ومنه: $D(5; 1)$ ③ تعيين الأعداد الحقيقية α, β و γ :

$$\begin{aligned}x_D &= \frac{\alpha(1) + \beta(-3) + \gamma(1)}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \Rightarrow x_D(\alpha + \beta + \gamma) &= \alpha - 3\beta + \gamma \\ \Rightarrow 5(\alpha + \beta + \gamma) &= \alpha - 3\beta + \gamma \\ \Rightarrow 4\alpha + 8\beta + 4\gamma &= 0 \\ \Rightarrow \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ y_D &= \frac{\alpha(0) + \beta(2) + \gamma(3)}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma &= 2\beta + 3\gamma \\ \Rightarrow \alpha - \beta - 2\gamma &= 0\end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

نضع $\gamma = 1$ (يمكن أخذ أي قيمة) ومنه:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0 \\ \alpha - \beta - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0 \dots (*) \\ -\alpha + \beta + 2 = 0 \dots (**) \end{cases}\end{aligned}$$

بجمع المعادلتين طرفاً لطرف نجد:

$$3\beta + 3 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

نعوض قيمة β في $(*)$ نجد:

$$\alpha - 2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

إذن: D مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$ ④ تعيين (Γ) :

لدينا:

$$\begin{aligned}\| -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| &= 2\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| \\ \Rightarrow \| (-2 + 1 - 1)\overrightarrow{MG} \| &= 2\| (1 - 1 + 1)\overrightarrow{MD} \| \\ \Rightarrow \| -2\overrightarrow{MG} \| &= 2\| \overrightarrow{MD} \| \\ \Rightarrow 2MG &= 2MD \\ \Rightarrow MG &= MD\end{aligned}$$

ومنه مجموعة النقط M هي محور القطعة $[GD]$

⑤

أ/ تعيين قيم m حتى تكون النقطة H موجودة:

$$m + 2 - 1 + m - 3 \neq 0$$

01

حل التمرين

① تعيين قيم m التي من أجلها يكون G_m موجودة

ووحيدة:

لدينا:

$$-m^2 + 4 + m^2 - 2m + 2m \neq 0 \Rightarrow 4 \neq 0$$

وعليه G_m موجودة ووحيدة من أجل كل $m \in \mathbb{R}$ ② تعيين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m :

$$\begin{aligned}x_{G_m} &= \frac{0(-m^2 + 4) + 0(m^2 - 2m) + 2(2m)}{4} \\ &= \frac{4m}{4} = m \\ y_{G_m} &= \frac{1(-m^2 + 4) + 5(m^2 - 2m) + 1(2m)}{4} \\ &= \frac{4m^2 - 8m + 4}{4} = m^2 - 2m + 1\end{aligned}$$

ومنه:

$$G_m(m; m^2 - 2m + 1)$$

③ المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$ المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$ هو التمثيل البياني للدالة ذات المعادلة:

$$y = x^2 - 2x + 1$$

02

حل التمرين

① تعيين إحداثيي النقطة G :

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{-2(1) + 1(-3) - 1(1)}{-2 + 1 - 1} = 3 \\ x_G &= \frac{-2(0) + 1(2) - 1(3)}{-2 + 1 - 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه:

$$G\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

② تعيين إحداثيي D حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع: $ABCD$ متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

لدينا:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 - x_D \\ 3 - y_D \end{pmatrix}\end{aligned}$$

1 إنشاء النقطة G:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

2 تبين أن H مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{BH} + 2\overrightarrow{HC} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

ومنه: H مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$

- إنشاء H:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

3 تبين أن النقط A، G و H في استقامية:

لدينا: G مرجح الجملة $\{(B; 1); (C; 2)\}$

ولدينا: H مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$

حسب خاصية التجميع نجد:

أن: H مرجح الجملة $\{(A; 1); (G; 3)\}$

وعليه:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}$$

إذن: النقط A، G و H في استقامية

4

أ/ تعيين المجموعة (Γ) :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| &= \frac{3}{4} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| \\ \Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| &= \frac{3}{4} \|4\overrightarrow{MH}\| \\ \Rightarrow 3MG &= \frac{3}{4} 4MH \\ \Rightarrow MG &= MH \end{aligned}$$

المجموعة (Γ) هي محور القطعة المستقيمة [GH]

ب/ تعيين المجموعة (Γ') :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| &\leq \frac{3}{4} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| \\ \Rightarrow MG &\leq MH \end{aligned}$$

المجموعة (Γ') نصف المستوي في جهة النقطة G و حدة

محور القطعة [GH]

5

أ/ تعيين احداثي كلا من النقطتين G و H:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1(-3) + 2(2)}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G &= \frac{1(0) + 2(1)}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2m - 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow 2m \neq 2$$

$$\Rightarrow m \neq 1$$

ومنه H موجودة لما $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

ب/ التعبير عن $\overrightarrow{AH}$ بدلالة m و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{-1}{2m-2} \overrightarrow{AB} + \frac{m-3}{2m-2} \overrightarrow{AC}$$

ج/ تعيين احداثي النقطة H بدلالة m:

$$\begin{aligned} x_H &= \frac{(1)(m+2) + (-3)(-1) + (1)(m-3)}{2m-2} \\ &= \frac{m+2+3+m-3}{2m-2} = \frac{2m+2}{2m-2} = \frac{m+1}{m-1} \\ y_H &= \frac{(0)(m+2) + (2)(-1) + (3)(m-3)}{2m-2} \\ &= \frac{-2+3m-9}{2m-2} = \frac{3m-11}{2m-2} \end{aligned}$$

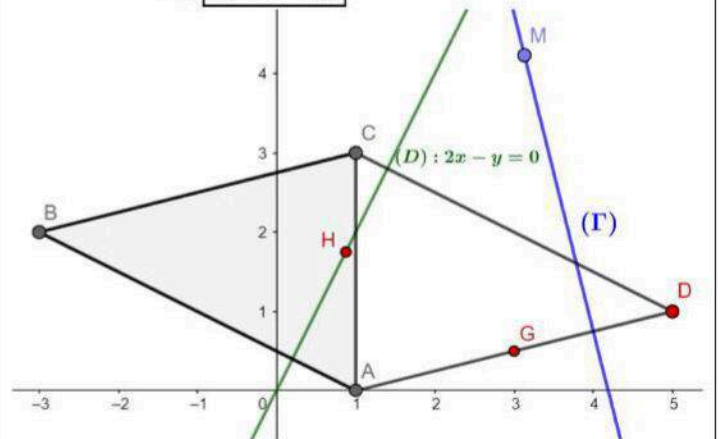
ومنه:

$$H\left(\frac{m+1}{m-1}; \frac{3m-11}{2m-2}\right)$$

د/ التعبير عن قيم m بحيث تكون H من (D):

$H \in (D)$ معناه:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{m+1}{m-1}\right) - \left(\frac{3m-11}{2m-2}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{4m+4-3m+11}{2m-2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{m+15}{2m-2} &= 0 \\ \Rightarrow m+15 &= 0 \\ \Rightarrow m &= -15 \end{aligned}$$



03

حل التمرين

$$= \left[-\frac{m}{m^2 + 1} \overrightarrow{BC} \right]$$

③ هل يمكن أن تنطبق N على G_m ؟

$$\overrightarrow{AG_m} = \frac{-m}{m^2 + 1} \overrightarrow{BC}$$

ومنه: $\overrightarrow{AG_m}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطياً

وبما أن: $N \in (BC)$ ، فإنه لا يمكن أن تنطبق N على G_m

④ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(x^2 + 1) - 2x(-x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 1 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $(x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ أو } x = -1$$

x	-1	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

⑤ استنتاج مجموعة النقط G_m :

لدينا:

$$\overrightarrow{AG_m} = \frac{-m}{m^2 + 1} \overrightarrow{BC}$$

لما $m \in \mathbb{R}$ مجموعة النقط هي المستقيم الذي يوازي (BC)

ويمر من النقط A

ولما $m \in [-1; 1]$

بما أن الدالة f متناقصة تماماً ونهايتها الحدية الكبرى هي

$$\left(-1; \frac{1}{2}\right) \text{ ونهايتها الحدية الصغرى هي } \left(1; -\frac{1}{2}\right)$$

فإن مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$

حيث $(G_{-1}G_1)$ يوازي (BC) ويقطع A

بالتوفيق للجميع

الأستاذ: قويسم الخليل

$$G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

ومنه:

$$x_H = \frac{1(0) + 1(-3) + 2(2)}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y_H = \frac{1(2) + 1(0) + 2(1)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$H\left(\frac{1}{4}; 1\right)$$

ومنه:

ب/ التأكد حسابياً من صحة نتيجة السؤال ③:

لدينا:

$$\overrightarrow{AH}\left(\frac{1}{4} - 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}\left(\frac{1}{4}\right)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AG}\left(\frac{1}{3} - 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AG}\left(\frac{1}{3}\right)$$

ومنه:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) - (-1)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

إذن $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AG}$ مرتبطان خطياً

وعليه النقط A ، G و H في استقامة

04

حل التمرين

① إنشاء G_1 و G_{-1} :

G_1 مرجح الجملة $\{(A; 2); (B; 1); (C; -1)\}$

ومنه:

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

G_{-1} مرجح الجملة $\{(A; 2); (B; -1); (C; 1)\}$

ومنه:

$$\overrightarrow{AG_{-1}} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

② تبرير وجود G_m من أجل عدد حقيقي m من $[-1; 1]$:

لدينا:

$$m^2 + 1 + m - m \neq 0 \Rightarrow m^2 + 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow m^2 \neq -1$$

ومنه G_m موجودة من أجل كل $m \in \mathbb{R}$

وعليه G_m موجودة من أجل كل $m \in [-1; 1]$

- تبين أن $\overrightarrow{AG_m} = \frac{-m}{m^2 + 1} \overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG_m} &= \frac{m}{m^2 + 1} \overrightarrow{AB} - \frac{m}{m^2 + 1} \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{m}{m^2 + 1} \overrightarrow{BA} - \frac{m}{m^2 + 1} \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{m}{m^2 + 1} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$