

# إختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

## التمرين الأول (5ن):

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي :

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = 0$  لدينا :  $a$  عدد حقيقي موجب تماما .

(2) المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  محور تناظر لمنحنى الدالة  $u$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $u(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 4x - 2}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = 1$

(4)  $(\Gamma)$  المنحنى الممثل للدالة  $e^x \mapsto x$  في المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
يوجد مماس وحيد للمنحنى  $(\Gamma)$  يمر من مبدأ المعلم .

(5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = 1$

## التمرين الثاني (8ن):

$h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :  $h(x) = x - 1 + \frac{1-x}{x^2}$

(1)  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(2) أحسب نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة التعريف .

(3) أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_h)$  .

ب- أدرس وضعية المستقيم  $(\Delta)$  بالنسبة للمنحنى  $(C_h)$  .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم ،  $h'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$  .

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة  $h$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(5) بين أن للمنحنى  $(C_h)$  نقطة إنعطاف يطلب تعيينها .

(6) المستقيم ذو المعادلة  $y = x + \alpha$  . حيث  $\alpha$  عدد حقيقي .

عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث يكون  $(T)$  مماسا لـ  $(C_h)$  في نقطة يطلب تعيين إحداثيها .

(7) تحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  ،  $h(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right)$  . استنتج نقط تقاطع المنحنى  $(C_h)$  مع محور الفواصل .

(8) أنشئ كلامن  $(\Delta)$  ،  $(T)$  و  $(C_h)$  .

(9) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ :  $v(x) = h(x^2)$  .

أدرس تغيرات الدالة  $v$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

## التمرين الثالث (7ن):

(I)  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = x - 1 + e^{-x}$ .

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$ .

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) \geq 0$  وأن:  $1 + xe^x > 0$ .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{1 + xe^x}$ .

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . الوحدة  $2cm$ .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً. (يعطى  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ )

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = \frac{-(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$ .

بـ استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أـ أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطعه مع حامل محور الترتيب.

بـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f(x) - (-x+1) = \frac{xe^x g(x)}{1+xe^x}$ .

جـ حدد الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(T)$ . ماذا تستنتج؟

(4) أنشئ كلا من  $(T)$  و  $(C_f)$ .

(5) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $f(x) = -m + 1$ .

(6) نعتبر الدالة  $k$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $k(x) = \frac{x}{e^x - x}$ . ( $C_k$ ) تمثيلها البياني.

أـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $k(x) = f(-x) - 1$ .

بـ إشرح كيفية إنشاء المنحنى  $(C_k)$  اعتماداً على المنحنى  $(C_f)$ ، ثم أنشئه.

## تصحيح الإختبار الأول في مادة الرياضيات

### حل مقترح للتمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

(1) خطأ .

التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{2x} = \sqrt{a}$$

(2) صحيح .

التبرير :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$u(2-x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)}{2(2-x)^2 - 4(2-x) - 2} = \frac{x^2 - 4x + 4 - 4 + 2x}{2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 4x - 2} = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 4x - 2} = u(x)$$

(3) خطأ .

التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x) - \sin(\pi)}{x-1} = \sin(\pi x)'(1) = \pi \cos(\pi) = -\pi$$

(4) صحيح .

التبرير :

ليكن  $(T_{x_0})$  مماس المنحنى  $(\Gamma)$  في النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  . لدينا : معادلة  $(T_{x_0})$  من الشكل :  $y = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}$  .

$(T_{x_0})$  يشمل المبدأ معناه  $e^{x_0}(-x_0) + e^{x_0} = 0$  أي  $0 = e^{x_0}(1 - x_0)$  وبالتالي  $x_0 = 1$  .

إذن يوجد مماس وحيد للمنحنى  $(\Gamma)$  يمر من مبدأ المعلم وهو المماس في النقطة ذات الفاصلة 1 ومعادلة له  $y = ex$  .

(5) خطأ .

التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ xe^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) + e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 2$$

## حل مقترح للتمرين الثاني:

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $h(x) = x - 1 + \frac{1-x}{x^2}$ .

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

(2) أ- تبيان أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_h)$ .

لدينا :  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [h(x) - (x - 1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x^2} = 0$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_h)$ .

ب- دراسة وضعية المستقيم  $(\Delta)$  بالنسبة للمنحنى  $(C_h)$ .

لدينا :  $h(x) - (x - 1) = \frac{1-x}{x^2}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $1 - x$  :

| $x$          | $-\infty$                  | 0                          | 1                                                  | $+\infty$                  |
|--------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------|
| $h(x) - y$   | +                          | +                          | 0                                                  | -                          |
| الوضع النسبي | ( $C_h$ ) فوق ( $\Delta$ ) | ( $C_h$ ) فوق ( $\Delta$ ) | ( $C_h$ ) يقطع ( $\Delta$ )<br>في النقطة $A(1; 0)$ | ( $C_h$ ) تحت ( $\Delta$ ) |

(3) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم،  $h'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$ .

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

$$h'(x) = 1 + \frac{-x \cdot x^2 - 2x \cdot (1-x)}{x^4} = \frac{x^4 - x^3 - 2x + x^2}{x^4} = \frac{x^3 + x - 2}{x^3} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة  $h$  :

لدينا :  $x^2 + x + 2 > 0$  لأن  $\Delta = -7 < 0$  ومنه إشارة  $h'(x)$  من إشارة  $x(x-1)$

وبالتالي الدالة  $h$  متزايدة على كل من المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]1; +\infty[$  ومتناقصة على المجال  $]0; 1[$ .

جدول تغيرات الدالة  $h$ .

| $x$     | $-\infty$ | 0         | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|---|-----------|
| $h'(x)$ | +         | -         | 0 | +         |
| $h(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |

(4) تبيان أن للمنحنى  $(C_h)$  نقطة إنعطاف :

الدالة  $h'$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

$$h''(x) = \frac{x^3 - 3x^2(x-2)}{x^6} = \frac{x - 3(x-2)}{x^4} = \frac{-2x + 6}{x^4}$$

إشارة  $h''(x)$  من إشارة  $-2x + 6$  ومنه النقطة  $\left(3; \frac{16}{9}\right)$  هي نقطة إنعطاف.

(5) المستقيم ذو المعادلة  $y = x + \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي .  
 تعيين قيمة العدد  $\alpha$  بحيث يكون  $(T)$  مماس لـ  $(C_h)$  في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها .  
 لنحل في  $\mathbb{R}^*$  المعادلة :  $h'(x) = 1$  .

$$h'(x) = 1 \text{ تكافئ } \frac{x^3 + x - 2}{x^3} = 1 \text{ تكافئ } x^3 + x - 2 = x^3 \text{ تكافئ } x = 2 .$$

معادلة مماس المنحنى في النقطة ذات الفاصلة 2 من الشكل  $y = h'(2)(x - 2) + h(2)$  أي  $y = x - \frac{5}{4}$  .

إذن من أجل  $\alpha = -\frac{5}{4}$  يكون  $(T)$  مماس لـ  $(C_h)$  في النقطة  $A\left(2; \frac{3}{4}\right)$  .

(6) التحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  ،  $h(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$  .

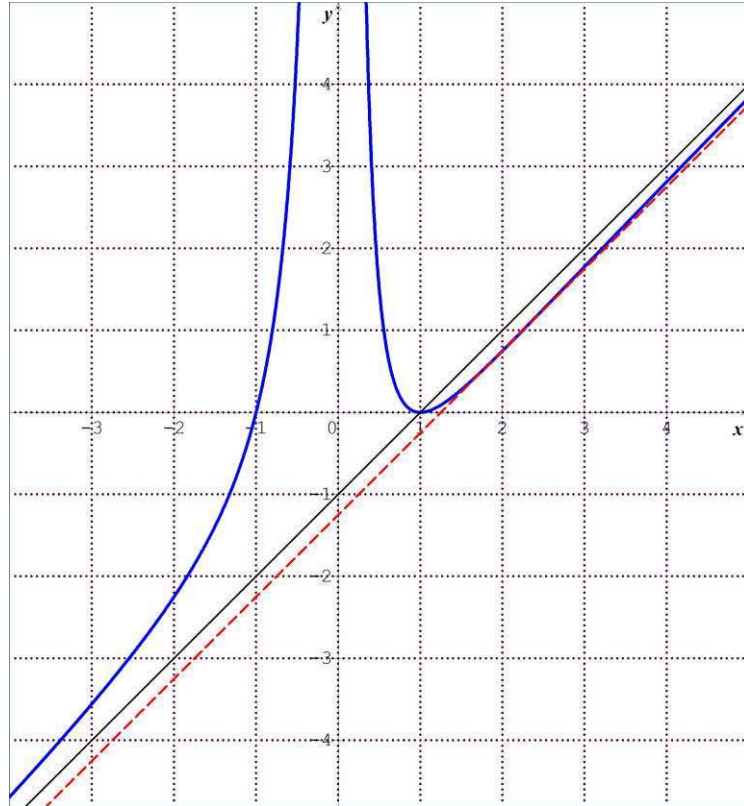
لدينا : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم :  $h(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x - 1 + \frac{1-x}{x^2} = h(x)$  .

(7) استنتاج نقط تقاطع المنحنى  $(C_h)$  مع حامل محور الفواصل .

فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_h)$  مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة :  $h(x) = 0$  .

$$h(x) = 0 \text{ تكافئ } \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \text{ تكافئ } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \text{ تكافئ } x = 1 \text{ أو } x = -1 .$$

(8) الرسم :



(9) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $v(x) = h(x^2)$ .

دراسة تغيرات الدالة  $v$ :

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ .

الدالة  $v$  قابلة للإشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$  و  $v'(x) = 2xh'(x^2)$ .

من أجل  $0 < x^2 \leq 1$ ، أي  $x \in ]0; 1[$  و  $x \in ]-1; 0[$  يكون  $h'(x^2) \leq 0$ .

من أجل  $x^2 \geq 1$ ، أي  $x \in ]1; +\infty[$  و  $x \in ]-\infty; -1[$  يكون  $h'(x^2) \geq 0$ .

جدول تغيرات الدالة  $v$ .

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$       | $1$       | $+\infty$ |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $v'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       | $-$       | $0$       | $+$       |
| $v(x)$  | $+\infty$ |      | $+\infty$ | $+\infty$ |           | $+\infty$ |

### حل مقترح للتمرين الثالث:

(I)  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = x - 1 + e^{-x}$ .

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة  $g$ :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g'(x) = 1 - e^{-x}$ .

$g'(x) \geq 0$  تكافئ  $1 - e^{-x} \geq 0$  تكافئ  $e^0 \geq e^{-x}$  تكافئ  $0 \geq -x$  أي:  $x \geq 0$ .

$g'(x) \leq 0$  تكافئ  $1 - e^{-x} \leq 0$  تكافئ  $e^0 \leq e^{-x}$  تكافئ  $0 \leq -x$  أي:  $x \leq 0$ .

وبالتالي الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  ومتناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$ .

(2) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) \geq 0$ .

لدينا:  $g(0) = 0$  قيمة حدية صغرى للدالة  $g$  وبالتالي: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) \geq 0$ .

إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $1 + xe^x > 0$ .

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) \geq 0$  أي  $x + e^{-x} \geq 1$  ومنه  $xe^x + 1 \geq e^x$  وبالتالي  $xe^x + 1 > 0$ .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{1 + xe^x}$ .

(1) النهايات:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

التفسير:

• المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

• المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

(2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = \frac{-(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$ .

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $f'(x) = -\frac{e^x + xe^x}{(1+xe^x)^2} = \frac{-(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$ .

بـ استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  :

لدينا : إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-(x+1)$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]-\infty; -1]$  ومتناقصة على المجال  $[-1; +\infty[$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |           |                      |           |
|---------|-----------|----------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$                 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$                  | $-$       |
| $f(x)$  | $1$       | $\frac{1}{1-e^{-1}}$ | $0$       |

(3) أـ كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطعه مع حامل الترتيب .

لدينا : معادلة  $(T)$  من الشكل  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$  أي  $(T) : y = -x + 1$  .

بـ التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$f(x) - (-x + 1) = \frac{1}{1 + xe^x} - (-x + 1) = \frac{1 - (-x + 1)(1 + xe^x)}{1 + xe^x} = \frac{x + x^2 e^x - xe^x}{1 + xe^x} = \frac{xe^x(e^{-x} + x - 1)}{1 + xe^x} = \frac{xe^x g(x)}{1 + xe^x}$$

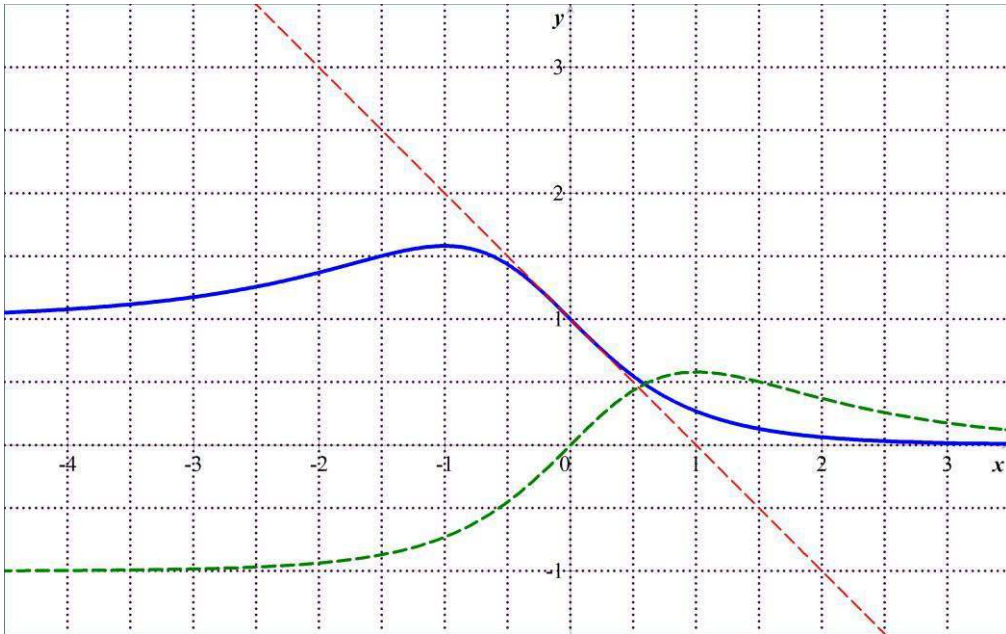
جـ - الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(T)$  .

لدينا :  $f(x) - (-x + 1) = \frac{xe^x g(x)}{1 + xe^x}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $x$  وبالتالي :

المنحنى  $(C_f)$  فوق المماس  $(T)$  من أجل  $x \in [0; +\infty[$  وأسفل منه من أجل  $x \in ]-\infty; 0]$  .

نستنتج أن النقطة  $A(0; 1)$  هي نقطة إنعطاف .

(4) الرسم :



(5) المناقشة البيانية :

حلول المعادلة حلول المعادلة :  $f(x) = -m + 1$  هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم ذو المعادلة  $y = -m + 1$ .

من أجل  $1 < -m + 1 < \frac{1}{1-e^{-1}}$  أي  $0 < m < 1 - \frac{1}{1-e^{-1}}$  ، المعادلة تقبل حلين .

من أجل  $0 < -m + 1 \leq 1$  أي  $0 \leq m < 1$  ، المعادلة تقبل حل واحد .

من أجل  $-m + 1 < 0$  أي  $m > 1$  ، المعادلة لا تقبل حلول .

من أجل  $-m + 1 = \frac{1}{1-e^{-1}}$  أي  $m = 1 - \frac{1}{1-e^{-1}}$  ، المعادلة تقبل حل واحد .

من أجل  $-m + 1 > \frac{1}{1-e^{-1}}$  أي  $m < 1 - \frac{1}{1-e^{-1}}$  ، المعادلة لا تقبل حلول .

(6) نعتبر الدالة  $k$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $k(x) = \frac{x}{e^x - x}$  .  $(C_k)$  تمثيلها البياني.

أ- تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $k(x) = f(-x) - 1$  .

$$f(-x) - 1 = \frac{1}{1-x^{-x}} - 1 = \frac{1-1+xe^{-x}}{1-xe^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{1-xe^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}(e^x - x)} = \frac{x}{e^x - x} = k(x) , x \text{ عدد حقيقي}$$

ب- شرح كيفية إنشاء المنحنى  $(C_k)$  اعتمادا على المنحنى  $(C_f)$  :

نرسم نظير المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الترتيب ، ثم نسحبه بالشعاع  $\vec{j}$  .



نشر يوم : 01.12.2021