

اختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

المستوى: ثانوية ثانوي - شعبة رياضيات

الأستاذ: قويسم الخليل

المدة: ساعتان

يوم: 22 ماي 2023

التمرين الأول: (09 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و m و t عدداً حقيقييننعتبر النقط $E(t; 2t - 1)$ و $D(-1; -4)$ ، $C(m; -2)$ ، $B(3; 0)$ ، $A(-1; 2)$ 1/ أ/ عيّن قيمة m حتى يكون المثلث ABC قائم في A [01.00]ب/ عيّن (γ) معادلةً للدائرة المحيطة بهذا المثلث (يطلب تعيين مركزها I ونصف قطرها) [02.00]ج/ عيّن (T) معادلةً للمماس للدائرة (γ) في A [01.00]2/ (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$ أ/ تحقق أن E تنتمي إلى المستقيم (Δ) [01.00]ب/ عيّن إحداثيتي E حتى يكون المستقيمان (Δ) و (CE) متعامدين [01.00]ج/ هل $D \in (\gamma)$ [00.50]3/ نعتبر المجموعة (Γ) للنقط $M(x, y)$ حيث $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 21 = 0$ أ/ بيّن أن (Γ) دائرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r [01.00]ب/ هل $D \in (\Gamma)$ [00.50]ج/ عيّن نقط تقاطع الدائرتين (γ) و (Γ) [01.00]

التمرين الثاني: (09 نقاط)

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$ و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{2 + u_n}{1 - u_n}$ 1/ بيّن أن (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول [01.50]2/ استنتج اتجاه تغير (v_n) [01.00]3/ أكتب عبارة v_n بدلالة n [01.00]4/ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n = 1 - \frac{3}{1 + v_n}$ ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n [02.00]5/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟ [01.50]6/ احسب، بدلالة n ، كل من S_n و P_n حيث: [02.00]

$$P_n = v_0^2 \times v_1^2 \times \dots \times v_n^2 \quad \text{و} \quad S_n = \frac{1}{1 - u_0} + \frac{1}{1 - u_1} + \dots + \frac{1}{1 - u_n}$$

التمرين الثالث: (02 نقاط)

(إرشاد: $\cos(3x) = \cos(2x + x)$)أثبت أن: $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$ [02.00]

تصحيح مقترح لاختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

المستوى: ثانوية ثانوي - شعبة رياضيات

الأستاذ: قويسم الخليل

التمرين الأول: (09 نقاط)

1

أ/ تعيين قيمة m حتى يكون المثلث ABC قائم في A :

ABC مثلث قائم في A معناه: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

لدينا: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} m+1 \\ -4 \end{pmatrix}$

ومنه: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

معناه: $(4)(m+1) + (-2)(-4) = 0$

معناه: $4m + 4 + 8 = 0$

معناه: $m = -3$

إذن: ABC قائم في A لما: $m = -3$

ب/ تعيين معادلة للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC :

بما أن ABC قائم في A

فإن قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو $[BC]$

وعليه $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

لدينا: $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 3-x \\ 0-y \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} -3-x \\ -2-y \end{pmatrix}$

ومنه: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

معناه: $(3-x)(-3-x) + (0-y)(-2-y) = 0$

معناه: $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$

إذن: $(\gamma): x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$

• إيجاد I مركز الدائرة (γ)

لدينا I منتصف $[BC]$

ومنه: $I \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} \right)$ أي: $I(0; -1)$

• إيجاد نصف القطر:

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

ج/ تعيين معادلة (T)

$(T): ax + by + c = 0$

لدينا: (IA) ناظم لـ (T) حيث: $\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

فإن: $(T): -x + 3y + c = 0$

بما أن

$$A \in (T)$$

فإن:

$$-(-1) + 3(2) + c = 0$$

أي:

$$c = -7$$

إذن:

$$(T): -x + 3y - 7 = 0$$

أي:

$$(T): x - 3y + 7 = 0$$

2

أ/ التحقق أن $E \in (\Delta)$:

$$2t - (2t - 1) - 1 = 0$$

$$2t - 2t + 1 - 1 = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$0 = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$E \in (\Delta) \quad \text{إذن:}$$

ب/ تعيين إحداثيتي النقطة E :

المستقيمين (Δ) و (CE) متعامدين معناه: $\vec{u}_\Delta \cdot \vec{CE} = 0$

$$\vec{CE} \begin{pmatrix} t+3 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_\Delta \cdot \vec{CE} = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$(1)(t+3) + (2)(2t+1) = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$5t + 5 = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$t = -1 \quad \text{معناه:}$$

$$E(-1; -3) \quad \text{إذن:}$$

ج/ هل $D \in (\gamma)$ ؟

$$(\gamma): x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$$

$$(-1)^2 + (-4)^2 + 2(-4) - 9 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$0 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$D \in (\gamma) \quad \text{إذن:}$$

3

أ/ تبين أن (Γ) دائرة:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 21 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 21 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$(x-(-2))^2 + (y-1)^2 = 26 \quad \text{ومنه:}$$

إذن: (Γ) دائرة مركزها $\Omega(-2; 1)$ ونصف قطرها $\sqrt{26}$

ب/ هل $D \in (\Gamma)$ ؟

$$(\Gamma): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 21 = 0$$

◀ التمرين الثاني: (09 نقاط)

1 تبين أن (v_n) هندسية:

$$v_{n+1} = \frac{2 + u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{2 + \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2}$$

$$= \frac{5(u_n + 2)}{2(1 - u_n)} = \frac{5}{2} v_n$$

2 استنتاج اتجاه تغير (v_n) :

$$v_0 = \frac{2 + u_0}{1 - u_0} = 3$$

بما أن: $q > 1$ و $v_0 > 0$

فإن (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3 كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n$$

4 تبين أن $u_n = 1 - \frac{3}{1+v_n}$:

$$v_n = \frac{2 + u_n}{1 - u_n} \quad \text{لدينا}$$

$$v_n(1 - u_n) = 2 + u_n \quad \text{ومنه}$$

$$v_n - u_n v_n = 2 + u_n \quad \text{ومنه}$$

$$v_n - 2 = u_n v_n + u_n \quad \text{ومنه}$$

$$u_n(v_n + 1) = v_n - 2 \quad \text{ومنه}$$

$$u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1} \quad \text{ومنه}$$

$$u_n = \frac{v_n + 1 - 3}{v_n + 1} \quad \text{ومنه}$$

$$u_n = \frac{v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{3}{v_n + 1} \quad \text{ومنه}$$

$$u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1} \quad \text{ومنه}$$

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1} = 1 - \frac{3}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n + 1}$$

5 حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n + 1} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^n = +\infty \quad \text{لأن}$$

• الاستنتاج: (u_n) متقاربة

$$(-1)^2 + (-4)^2 - 4 - 2(-4) - 21 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$0 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$D \in (\Gamma) \quad \text{إذن:}$$

ج/ إيجاد نقط تقاطع الدائرتين (Γ) و (γ) :

$$\begin{cases} (\Gamma): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 21 = 0 \\ (\gamma): x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 21 = x^2 + y^2 + 2y - 9$$

$$4x - 4y - 12 = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$x - y - 3 = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$x = y + 3 \quad \text{معناه:}$$

نعوض قيمة x في (γ)

$$(y + 3)^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \quad \text{نجد:}$$

$$y^2 + 9 + 6y + y^2 + 2y - 9 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$2y^2 + 8y = 0 \quad \text{ومنه:}$$

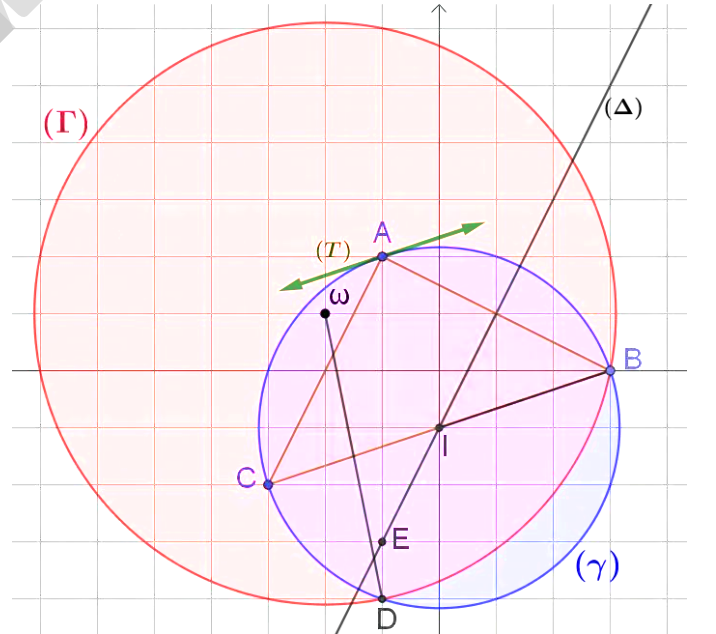
$$y^2 + 4y = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$y(y + 4) = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \text{أو} \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

$$(\Gamma) \cap (\gamma) = \{(3; 0); (-1; -4)\} \quad \text{إذن:}$$

$$(\Gamma) \cap (\gamma) = \{B; D\} \quad \text{أي:}$$



◀ التمرين الثالث: (02 نقاط)

اثبات أن: $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) \\ &= \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - (2 \cos x \sin x) \sin x \\ &= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \cos x \sin^2 x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

إذن:

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

وعليه:

$$\cos^3 x = \frac{\cos(3x) + 3 \cos x}{4}$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا العام المقبل



♥♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥♥

⑥ حساب، بدلالة n ، كل من S_n و P_n :

$$u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1} \quad \text{لدينا :}$$

$$u_n - 1 = -\frac{3}{v_n + 1} \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{1}{u_n - 1} = -\frac{v_n + 1}{3} \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{3}(v_n + 1) \quad \text{ومنه :}$$

وعليه:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{1 - u_0} + \frac{1}{1 - u_1} + \dots + \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{1}{3}(v_0 + 1) + \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \dots + \frac{1}{3}(v_n + 1) \\ &= \frac{1}{3}(v_0 + 1 + v_1 + 1 + \dots + v_n + 1) \\ &= \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1(n + 1)) \\ &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{5}{2} - 1} \right) + n + 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(2 \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - 1 \right) + n + 1 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_n &= v_0^2 \times v_0^2 \times \dots \times v_n^2 = (v_0 \times v_0 \times \dots \times v_n)^2 \\ &= \left(3 \left(\frac{5}{2}\right)^0 \times 3 \left(\frac{5}{2}\right)^1 \times \dots \times 3 \left(\frac{5}{2}\right)^n \right)^2 \\ &= \left(3^{n+1} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{0+1+\dots+n} \right)^2 \\ &= \left(3^{n+1} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)^2 \\ &= 3^{2n+2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{n(n+1)}\end{aligned}$$