



الفرض الأول للفصل الأول في الرياضيات

التمرين الأول :

I. بسط كل من الأعداد التالية ثم عين أصغر مجموعة تنتمي إليها كل عدد :

$$d = \frac{(-12)^{16} \times (75)^{-4} \times (-4)^{-9}}{[(25)^{-2}]^4 \times (10)^4 \times (18)^6}, \quad c = \frac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2}, \quad b = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}, \quad a = \frac{\pi^2 \times (3,14)}{\pi \times (3,14)^2}$$

II. بين أن الأعداد التالية طبيعية :

$$D = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}, \quad C = \frac{3^{10}}{243}, \quad B = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}, \quad A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \quad \text{و} \quad \alpha = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \quad \text{III.} \quad \alpha \text{ و } \beta \text{ أعداد حقيقية حيث :}$$

1. احسب $(\sqrt{5}-1)^2$ ثم استنتج كتابة مبسطة للعدد α

2. احسب β^2 ثم استنتج كتابة مبسطة للعدد β ثم قارن بين α و β

التمرين الثاني :

A و B عددان طبيعيين حيث : $A = 6300$ و $B = 2700$

1. حلل العددين الطبيعيين A و B إلى جداء عوامل أولية. عين كل من $PGCD(A; B)$ و $PPCM(A; B)$

2. استنتج كل من : $PPCM(A^4; B^2)$ و $PPCM(A; B^2)$

3. اختزل الكسر $\frac{A}{B}$ ثم احسب الكسر $\frac{2}{6300} + \frac{5}{2700}$

4. عين أصغر عدد طبيعي m بحيث يكون العدد $\sqrt{A \times B \times m}$ عدداً طبيعياً

5. إذا علمت أن : $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ و $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ جد حصر لكل من : $\sqrt{A+B}$ و $\sqrt{A \times B}$.

التمرين الثالث :

ليكن x و y عددان حقيقيان حيث : $3 < x < 8$ و $-7 < y < -3$

1. عين حصر لكل من : $x-y$ ، $1+y^2$ و $\frac{1}{1+y^2}$

2. استنتج حصر لكل من : $\sqrt{\frac{x-y}{1+y^2}}$ و $(x-y)(1+y^2)$

التمرين الرابع :

n عدد طبيعي غير معدوم

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

2. استنتج قيمة العدد S حيث : $S = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{64\sqrt{63}+63\sqrt{64}}$

التمرين الأول الفصل الأول سنة أولى ثانوي

$$a = \frac{\pi^2 \times (3,14)}{\pi \times (3,14)^2} = \frac{\cancel{\pi} \times \cancel{\pi} \times (3,14)}{\cancel{\pi} \times (3,14) \times (3,14)} = \frac{\pi}{3,14} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$b = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{5+2}{10}}{\frac{5-2}{10}} = \frac{7}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{7}{3} \quad (b \in \mathbb{Q})$$

$$c = \frac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - 2\sqrt{2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1} - 2\sqrt{2}$$

$$c = 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} = -1 \quad (c \in \mathbb{Z})$$

$$d = \frac{(-12)^{16} \times (75)^{-4} \times (-4)^{-9}}{[(25)^2]^4 \times (10)^4 \times (18)^6} = \frac{(12)^{16} \times \frac{1}{75^4} \times \frac{1}{(-4)^9}}{(25)^{-8} \times (10)^4 \times (18)^6}$$

$$d = \frac{(2^2 \times 3)^{16} \times \frac{1}{(3 \times 5^2)^4} \times \frac{-1}{(2^2)^9}}{\frac{2^{32} \times 3^{16}}{3^4 \times 5^8} \times \left(\frac{-1}{2^{18}}\right)} = \frac{\frac{1}{(2^2)^3} \times (2 \times 5)^4 \times (2 \times 3^2)^6}{\frac{2^4 \times 5^4 \times 2^6 \times 3^{12}}{5^{16}}}$$

$$d = \frac{-2^{14} \times 3^{12}}{5^8} = \frac{-2^{14} \times 3^{12}}{5^8} \times \frac{5^{12}}{2^{10} \times 3^{12}} = -2^{4} \times 5^4 = -10000$$

ملاحظة 1

$$d = -2^4 \times 5^4 = -(2 \times 5)^4 = -10000$$

$(d \in \mathbb{Z})$

$$A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{361 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{19^2 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{19\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 19 \quad (\text{II})$$

$(A \in \mathbb{N})$ ومنه

$$B = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{(a^2 + b^2 + 2ab) - (a^2 + b^2 - 2ab)}{ab}$$

$$B = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab}{ab} = \frac{4ab}{ab} = 4$$

$(B \in \mathbb{N})$

$$C = \frac{3^{10}}{243} = \frac{3^{10}}{3^5}$$

$$C = 3^{10-5} = 3^5 = 243$$

ومنه $(C \in \mathbb{N})$

الأستاذ: عبد القادر

insta: Prof_toutaoui_kader

تحليل 243 الى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$243 = 3^5$$

$$D = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 2\sqrt{2}$$

$$D = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1} - 2\sqrt{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{1} - 2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$

$$D=3$$

; $(D \in \mathbb{N})$

$$(\sqrt{5}-1)^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 - 2\sqrt{5}$$

$$= 6 - 2\sqrt{5}$$

(1) حساب $(\sqrt{5}-1)^2$

تبسيط α :

$$\alpha = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$$

(لأن $\sqrt{5}-1 > 0$)

$$\beta^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right)^2$$

لملاحظة (2)

$$= \left(\sqrt{4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right)^2 + \left(\sqrt{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right)^2 + 2\sqrt{4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \times \sqrt{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\beta^2 = 4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2 \times \sqrt{(4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}})(4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}})}$$

$$\beta^2 = 8 + 2\sqrt{(4)^2 - (\sqrt{10+2\sqrt{5}})^2} = 8 + 2\sqrt{16 - 10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\beta^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$\beta^2 = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 8 + 2 \times (\sqrt{5}-1)$$

$$\beta^2 = 8 + 2\sqrt{5} - 2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$\beta = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1.$$

• مقارنة بين α و β : $\alpha = \sqrt{5}-1$; $\beta = \sqrt{5}+1$

$$\alpha - \beta = (\sqrt{5}-1) - (\sqrt{5}+1)$$

$$= \sqrt{5}-1 - \sqrt{5}-1$$

$$\alpha - \beta = -2$$

بما أن $-2 < 0$ فإن : $\alpha - \beta < 0$ وعليه $\alpha < \beta$

صفحة 3

$A = 6300$ و $B = 2700$

التمرين الثاني :

$$\text{PGCD}(A, B) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\text{PGCD}(A; B) = 900$$

$$\text{PPCM}(A; B) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{PPCM}(A; B) = 18900$$

$$\begin{array}{r|l} 6300 & 2 \\ 3150 & 2 \\ 1775 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2700 & 2 \\ 1350 & 2 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$A = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

$$B = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

الأستاذ: عبد القادر

meta: Prof_toutaoui_Kader

$$B^2 = (2^2 \times 3^3 \times 5^2)^2 = 2^4 \times 3^6 \times 5^4$$

$$A^4 = (2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7)^4 = 2^8 \times 3^8 \times 5^8 \times 7^4$$

$$\text{PPCM}(A, B^2) = 2^4 \times 3^6 \times 5^4 \times 7 = 51030000$$

$$\text{PPCM}(A^4; B^2) = 2^8 \times 3^8 \times 5^8 \times 7^4 = 1575296100000000$$

③ اختزال الكسر:

$$\frac{A}{B} = \frac{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7}{2^4 \times 3^2 \times 3 \times 5^2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{6300} + \frac{5}{2700} = \frac{41}{18900}$$

④ تعيين أصغر عدد طبيعي m بحيث $\sqrt{A \times B \times m}$ عددًا طبيعيًا:

$$\sqrt{A} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7} = 2 \times 3 \times 5 \sqrt{7} = 30 \sqrt{7}$$

$$\sqrt{B} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 3 \times 5^2} = 5 \times 3 \times 2 \sqrt{3} = 30 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{A \times B \times m} = \sqrt{A} \times \sqrt{B} \times \sqrt{m} = 30 \sqrt{7} \times 30 \sqrt{3} \times \sqrt{m} = 900 \sqrt{21} \sqrt{m}$$

$$m = 21 \quad \text{ومنه}$$

⑤ الحصر: حصر $\sqrt{A}$: لدينا: $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ ومنه

$$30 \times 2,6 < 30 \sqrt{7} < 30 \times 2,7$$

$$(1) \dots\dots 78 < \sqrt{A} < 81$$

حصر $\sqrt{B}$: لدينا $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ ومنه

$$30 \times 1,7 < 30 \sqrt{3} < 30 \times 1,8$$

صفحة 4

$$(2) \dots\dots 51 < \sqrt{B} < 54$$

حصر $\sqrt{A} \times \sqrt{B}$ من (1) و (2) نجد: $78 \times 51 < \sqrt{A} \times \sqrt{B} < 81 \times 54$

$$3978 < \sqrt{A} \times \sqrt{B} < 4374 \quad \text{ومنه}$$

حصر $\sqrt{A} + \sqrt{B}$: من (1) و (2) نستنتج: $78 + 51 < \sqrt{A} + \sqrt{B} < 81 + 54$

$$129 < \sqrt{A} + \sqrt{B} < 135$$

التمرين الثالث: $3 < x < 8$ و $-7 < y < -3$

• حصر $x - y$: نكتب $-y$ على الشكل $x + (-y)$

نقوم أولاً بإيجاد حصر للعدد $-y$ حيث $3 < -y < 7$

$$3 < x < 8 \quad \text{ولدينا}$$

الآن نجمع المتباينتين طرفاً بطرف نجد:

$$6 < x - y < 15$$

حصر $1+y^2$: نقوم أولاً بإيجاد حصر للعدد y^2 :

لدينا $-7 < y < -3$ ومنه $9 < y^2 < 49$ وعليه

$$10 < 1+y^2 < 50$$

حصر $\frac{1}{1+y^2}$: لدينا $10 < 1+y^2 < 50$ ومنه $\frac{1}{50} < \frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{10}$

$$\sqrt{\frac{x-y}{1+y^2}} = \sqrt{(x-y) \times \frac{1}{1+y^2}}$$

الاستاذ عبد القادر

لدينا : $6 < x-y < 15$

$$\frac{1}{50} < \frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{10}$$

بالتضرب طرفاً لطرف نجد : $\frac{6}{50} < \frac{x-y}{1+y^2} < \frac{15}{10}$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} < \sqrt{\frac{x-y}{1+y^2}} < \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ وعليه } \frac{3}{25} < \frac{x-y}{1+y^2} < \frac{3}{2}$$

حصر $(y-x)(1+y^2)$: لدينا $6 < x-y < 15$ وعليه $10 < 1+y^2 < 50$

$$60 < (x-y)(1+y^2) < 750$$

ملاحظة 5

التعريف الرابع : m عدد طبيعي غير معدوم

$$\frac{1}{(m+1)\sqrt{m} + m\sqrt{m+1}} = \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} : m \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)\sqrt{m} + m\sqrt{m+1}} &= \frac{(m+1)\sqrt{m} - m\sqrt{m+1}}{((m+1)\sqrt{m} + m\sqrt{m+1})((m+1)\sqrt{m} - m\sqrt{m+1})} \\ &= \frac{(m+1)\sqrt{m} - m\sqrt{m+1}}{(m+1)^2 \times m - m^2(m+1)} = \frac{(m+1)\sqrt{m} - m\sqrt{m+1}}{(m^3 + 2m^2 + m) - (m^3 + m^2)} \\ &= \frac{(m+1)\sqrt{m} - m\sqrt{m+1}}{m^2 + m} = \frac{(m+1)\sqrt{m}}{m(m+1)} - \frac{m\sqrt{m+1}}{m(m+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} \times \sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ومن هنا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

② قيمة العدد :

$$S = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{64\sqrt{63}+63\sqrt{64}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots + \frac{1}{\sqrt{63}} - \frac{1}{\sqrt{64}}$$

$$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{64}} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8}$$

صفحة 6

$$S = \frac{7}{8}$$

الأستاذ: عبدالقادر

insta: Prof_toutaoui_Kader