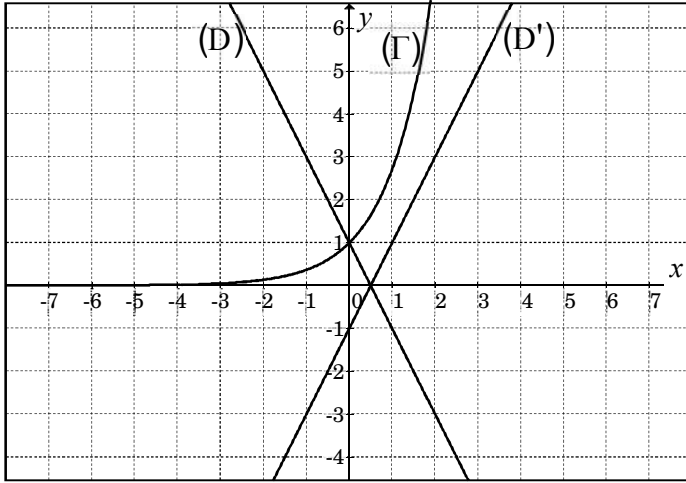


اختبار

الفصل الأول



تمرين 1 (9 نقاط)



I- في الشكل المقابل (Γ) ، (D) و (D') على الترتيب التمثيلات البيانية للدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto -2x+1$ و $x \mapsto 2x-1$.
و u و v الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $u(x) = e^x + 2x - 1$ و $v(x) = e^x - 2x + 1$.
(1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x وضعية (Γ) بالنسبة لكل من المستقيمين (D) و (D') .
(2) استنتج إشارة كل من $u(x)$ و $v(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{e^x + 2x - 1}{e^x - 2x + 1}$.
 $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ، ثم فسّر هاتين النهايتين هندسياً.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = 1$.

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{2(-2x+3)e^x}{(e^x - 2x + 1)^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها. (اعتبر $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2,6$)

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسّر هذه النهاية هندسياً.

ب) اكتب معادلة (Δ) مماس المنحني $(\mathcal{C})$ عند المبدأ O .

(4) أ) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathcal{C})$. (وحدة الرسم $2cm$)

ب) عيّن بياناً قيم الوسيط الحقيقي m ($m \neq 0$) التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = \frac{x}{m}$ ثلاثة حلول متمايضة،

أحدهم فقط سالب تماماً.

(5) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (f(x))^2 - 2f(x)$.

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g .

III- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = \frac{e^x - 2kx + k}{e^x - 2x + 1}$. حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة I (مستقلة عن k) يطلب تعيين إحداثياتها.

(2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'_k(x) = \frac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x - 2x + 1)^2}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير f_k من أجل $k > 1$ و $k < 1$.

(3) عيّن قيمة k_0 التي من أجلها المنحنيين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_{k_0})$ متناظران بالنسبة للمستقيم (d) ، وارسم $(\mathcal{C}_{k_0})$ في المعلم السابق.

تمرين 2 (8 نقاط)

- I- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x - 3 + \ln x$.
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
- (2) بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.
- (3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2, 20 < \alpha < 2, 21$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
- (C) تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ضع $t = \sqrt{x}$).
- (2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (3) أ) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C')، حيث (C') هو محني الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$.
ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{x})$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.
- (4) أ) بين أن $f(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 0,02.
ب) بين أنه توجد فاصلة وحيدة x_0 حيث المماس لـ (C) والمماس لـ (C') عند x_0 متوازيان.
- (5) أ) أنشئ المماس (Δ) لـ (C) عند 1، والمنحنيين (C) و (C') في المعلم نفسه. (تأخذ $f(\alpha) \approx 1,6$)
ب) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، وجود وعدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m^2$.
- (6) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{\alpha}{2}\right\}$ بـ $h(x) = f(|2x - \alpha|)$.
- أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $\left[\frac{\alpha}{2}; +\infty\right]$. (النهايات غير مطلوبة)
ب) بين أن $x = \frac{\alpha}{2}$ ، هي معادلة لمحور تناظر المنحني الممثل للدالة h ، ثم شكّل جدول تغيرات h .

تمرين 3 (3 نقاط)

- g الدالة المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{g(x)}{x+1}$ ، حيث $f(0) = 1$.
- نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين: (E) $y' - y = 0$... و (F) $y' - y = -\frac{e^x}{(x+1)^2}$...
- (1) احسب $g(0)$ ، ثم عيّن عبارة $g(x)$ إذا علمت أن g حل للمعادلة التفاضلية (E).
- (2) عيّن عبارة $f(x)$ ، ثم بين أن الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (F).
- (3) عيّن الحل h للمعادلة التفاضلية $y' - y = \frac{e^x}{(x+1)^2}$ ، إذا علمت أن $h(0) = 0$.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = (-1)^2 - 2(-1) = 3 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) - 2f'(x) = 2f'(x)(f(x) - 1)$$

إشارة $(f(x) - 1)$ مذكورة في II-1 ب.

x	$-\infty$	$1/2$	$3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x) - 1$	-	0	+	+
$g'(x)$	-	0	+	-

x	$-\infty$	$1/2$	$3/2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	-
$g(x)$	3	-1	1,6	-1

III-1 لنكن $I(x_0, y_0)$ نقطة مشتركة لـ (C)

$$y_0 = \frac{e^{x_0} + k(-2x_0 + 1)}{e^{x_0} - 2x_0 + 1}$$

$$k(-2x_0 + 1) = y_0(e^{x_0} - 2x_0 + 1) + e^{x_0} = 0$$

$$I\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ ومنه } \begin{cases} -2x_0 + 1 = 0 \\ -y_0(e^{x_0} - 2x_0 + 1) + e^{x_0} = 0 \end{cases}$$

$$f'_k(x) = \frac{(e^x - 2k)(e^x - 2x + 1) - (e^x - 2)(e^x - 2kx + k)}{(e^x - 2x + 1)^2}$$

$$f'_k(x) = \frac{e^x(-2x + 3 + 2kx - 3k)}{(e^x - 2x + 1)^2} = \frac{e^x(-2x + 3 - k(2x - 1))}{(e^x - 2x + 1)^2}$$

$$f'_k(x) = \frac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x - 2x + 1)^2}$$

$$\frac{3/2}{+} \rightarrow : f'_k(x) \text{ إشارة } k < 1$$

f_k متزايدة تماماً على $]-\infty, 3/2]$

f_k متناقصة تماماً على $]3/2, +\infty[$

$$\frac{3/2}{-} \rightarrow : f'_k(x) \text{ إشارة } k > 1$$

f_k متزايدة تماماً على $]3/2, +\infty[$

f_k متناقصة تماماً على $]-\infty, 3/2]$

نلاحظ: بما $k=1$ ، f_k ثابتة

(3) و (4) متناظران بالنسبة لـ (d)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{f(x) + f_{k_0}(x)}{2} = 1 \quad \text{يعني:}$$

$$\frac{e^x + 2x - 1}{e^x - 2x + 1} + \frac{e^x - 2k_0x + k_0}{e^x - 2x + 1} = 2$$

$$2e^x + (2 - 2k_0)x - 1 + k_0 = 2e^x - 4x + 2$$

$$(2 - 2k_0)x - 1 + k_0 = -4x + 2$$

$$\begin{cases} 2 - 2k_0 = -4 \\ -1 + k_0 = 2 \end{cases} \text{ ومنه } k_0 = 3$$

تصحيح اختبار الفصل الأول 2022م

عبد المطلب

تمرين 1:

(D) $\{ (x) : x > 0 \}$ (I) $\{ (x) : x < 0 \}$ (II) $\{ (x) : x = 0 \}$
عند $A(0, 1)$
عند $I(1/2, 1)$
عند $D(3/2, 1.6)$

$$M(x) = e^x - (-2x + 1) = e^x + 2x - 1$$

$$V(x) = e^x - (2x - 1) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{e^x}{x} + 2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\frac{e^x}{x} - 2 + \frac{1}{x} \right)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 - \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)} = 1$$

$$f(x) - y = f(x) - 1 = \frac{2(2x - 1)}{e^x - 2x + 1}$$

من إشارة $(2x - 1)$ لأن $e^x - 2x + 1 > 0$
(d) $\{ (x) : x > \frac{1}{2} \}$
(c) $\{ (x) : x < \frac{1}{2} \}$
عند $I(1/2, 1)$

$$f'_k(x) = \frac{(e^x + 2)(e^x - 2x + 1) - (e^x - 2)(e^x + 2x - 1)}{(e^x - 2x + 1)^2} = \frac{(-4x + 6)e^x}{(e^x - 2x + 1)^2}$$

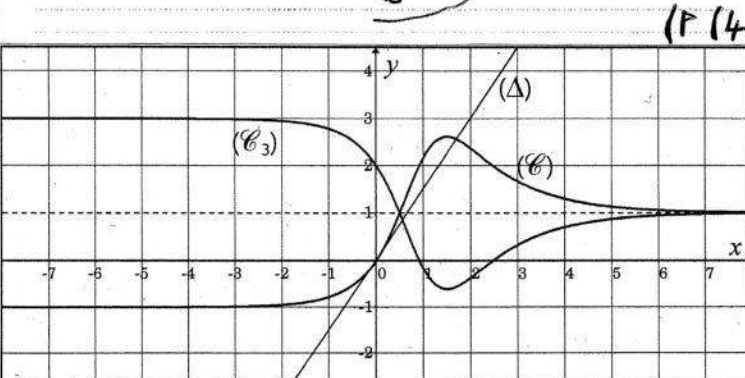
$$f'_k(x) = \frac{(-4x + 6)e^x}{(e^x - 2x + 1)^2}$$

متزايدة تماماً لما $x \leq \frac{3}{2}$ ، ومتناقصة تماماً لما $x > \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	-1	2,6	1

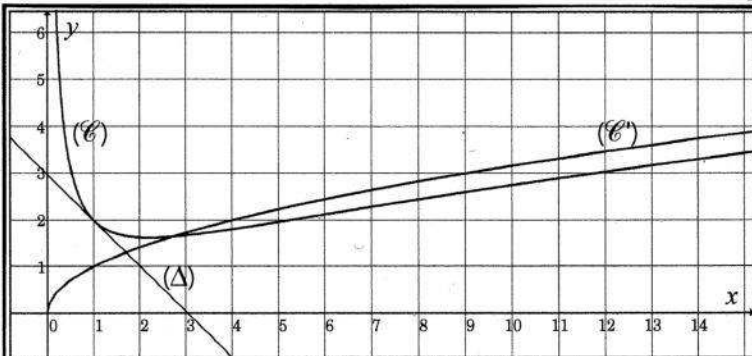
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{3}{2}$$

العدد $f'(0)$ هو معامل توجية المماس لـ (C) عند O
بالمماس (Δ) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{3}{2}x$



$y = x$: مستقيمات تشمل النقطة الثابتة O

$$m \in]\frac{2}{3}, +\infty[$$



بم حلول هذه المعادلة (أ) خواصل نقاط نظام (ب) مع مستقيمتان
موازيتان (ب) $m < 3$ أي $m < 3$ لا يوجد حلول
 $m > 3$ أي $m = \sqrt{3}$ و $m = -\sqrt{3}$ يوجد حل واحد
 $m > 3$ أي $m \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ يوجد حلان

$$R'(x) = 2f'(2x-\alpha) \quad R(x) = f(2x-\alpha) : x > \frac{\alpha}{2} \quad (P 6)$$

$x = \alpha$: حينئذ $2x - \alpha = \alpha$ لذا $R'(x) = 0$
 $x > \alpha$: حينئذ $2x - \alpha > \alpha$ ، $f'(2x - \alpha) > 0$ ، $R'(x) > 0$
 $\alpha < x < \alpha$: حينئذ $0 < 2x - \alpha < \alpha$ ، $f'(2x - \alpha) < 0$ ، $R'(x) < 0$
متزايدة تماماً لـ $x > \alpha$ و متناقصة تماماً لـ $\alpha < x < \alpha$

(ب) من أجل $x \neq \frac{\alpha}{2}$: $x \neq \frac{\alpha}{2}$ ، $x \neq \frac{\alpha}{2}$ ، $x \neq \frac{\alpha}{2}$
 $R(\alpha - x) = f(12(\alpha - x) - \alpha) = f(12\alpha - 12x - \alpha) = f(11\alpha - 12x) = R(x)$

x	$-\infty$	0	$\alpha/2$	α	$+\infty$
$R'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$R(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$x_1, x_2 \in D_R$: $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$ يعني محور تناظر يعني $x = \frac{\alpha}{2}$
لذا كان $x_1 = \alpha$ ، $x_2 = 0$: حينئذ $\frac{\alpha + 0}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ، $x_1 = \alpha$ ، $x_2 = 0$

تمرين 3:

$$g(0) = f(0) = 1 \quad \text{و حينئذ} \quad g(x) = (x+1)f(x) \quad (1)$$

حل (E) هو : $x \mapsto Ce^x$ (الحل العام)

$$C = 1 \quad \text{بما أن} \quad g(0) = 1 \quad \text{لذا} \quad Ce^0 = 1 \quad \text{أي} \quad C = 1$$

$$g(x) = e^x \quad \text{و حينئذ}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{x+1} = \frac{e^x}{x+1} \quad \text{لذا} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$$

$$f' - f = \frac{-e^x}{(x+1)^2} \quad \text{بمعنى} \quad (F)$$

$$f'(x) - f(x) = \frac{x e^x}{(x+1)^2} - \frac{e^x}{x+1} = \frac{-e^x}{(x+1)^2}$$

$$(R+f)' - (R+f) = 0 \quad \text{بالجمع نجد} \quad \begin{cases} R' - R = \frac{e^x}{(x+1)^2} \\ f' - f = -\frac{e^x}{(x+1)^2} \end{cases} \quad (3)$$

$$R(x) = Ce^x - f(x) \quad \text{لذا} \quad R(x) + f(x) = Ce^x$$

$$R(x) = \frac{x e^x}{x+1} \quad \text{و حينئذ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \quad (1-I)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \quad (2)$$

و حينئذ g متزايدة تماماً على $]0, +\infty[$

$$g(2,2) \approx -0,01 < 0 \quad \text{و} \quad g(2,21) \approx 0,003 > 0$$

و حينئذ حسب مبرهن القيمة المتوسطة : $g(x) = 0$ تقبل حل واحد α حيث $2,2 < \alpha < 2,21$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \infty + \infty = +\infty \quad (1-II)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(t + \frac{1}{t} - \frac{\ln t^2}{t} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(t + \frac{1}{t} - \frac{2 \ln t}{t} \right) = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-3+\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: $g(x) = x-3+\ln x$

f متزايدة تماماً لـ $x \geq \alpha$ و متناقصة تماماً لـ $0 < x \leq \alpha$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$f(x) - \sqrt{x} = \frac{1 - \ln x}{\sqrt{x}} \quad (P 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2 \ln t}{t} \right) = 0$$

و حينئذ (F) يقارب (E) بجوار (A)

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\ln \alpha}{\sqrt{\alpha}} \quad (P 4)$$

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{لذا} \quad \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\ln \alpha}{\sqrt{\alpha}} = 0$$

$$(\ln \alpha = 3 - \alpha) \quad \alpha - 3 + \ln \alpha = 0$$

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3-\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}$$

$$f(\alpha) = 2\sqrt{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$$

$$2,4 < 2(\alpha-1) < 2,42 \quad ; \quad 1,2 < \alpha-1 < 1,21 \quad ; \quad 2,2 < \alpha < 2,21$$

$$\frac{1}{\sqrt{2,21}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{2,2}}$$

$$1,62 < f(\alpha) < 1,63 \quad \text{و حينئذ} \quad \frac{2,4}{\sqrt{2,21}} < \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} < \frac{2,42}{\sqrt{2,2}}$$

$$\frac{x_0 - 3 + \ln x_0}{2x_0\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad ; \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$x_0 = e^3 \quad \text{و حينئذ} \quad -3 + \ln x_0 = 0$$

$$(x-1) + f(1) = -x + 3 \quad (A) \quad (P 5)$$