| | | |
|---|---|---|
| ثانوية: المجاهد صديقي نوري بالجلفة | **فرض الفصل الأول** | الموسـم الدراسي: 2021 / 2022 |
| المستوى: 2 ثانوي - شعبة رياضيات | | الأستاذ: قويسم براهيم الخليل |
| يوم: 02 نوفمبر 2021 | تنبيه: يمنع استعمال اللون الأحمر | المـــدة: 1 سا و 10 د |

### ◆ التمرين 01: [06 نقاط]

نعتبر كثيري الحدود $P$ و $Q$

$$P(x) = -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2) \quad ; \quad Q(x) = 2x^4 - 2x^2 - 4$$

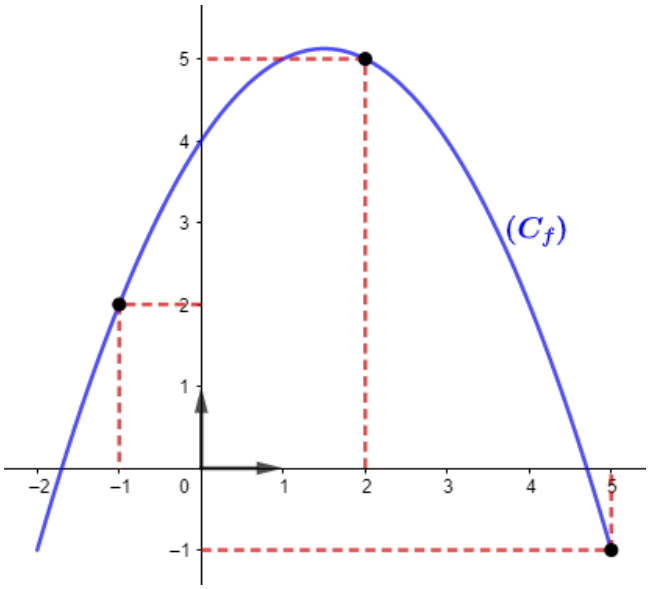
حيث $\alpha$ عدد حقيقي

[1 ن] ❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$

[2 ن] ❷ عيّن درجة كثير الحدود $P$، ثم بيّن أنّ $\alpha$ جذر لـ $P(x)$

[2 ن] ❸ بيّن أنّ: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $P(x) = 0$

[1 ن] ❹ استنتج حلول المعادلة $P(|x| + 1) = 0$




### ◆ التمرين 02: [03 نقاط]

$f$ دالة معرفة على المجال $[-2; 5]$ بتمثيلها البياني $(C_f)$ (الشكل المقابل)

[1 ن] ❶ احسب $(f \circ f \circ f)(2)$، ثم استنتج $\left(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{2021 مرة}}\right)(2)$

[2 ن] ❷ أنشئ $(C_g)$ و $(C_h)$ التمثيل البياني للدالتين $g$ و $f$ ، حيث:

$$g(x) = f(-|-x|)$$
$$h(x) = |-f(-x)|$$

### ◆ التمرين 03: [11 نقطة]

I) $f$ و $g$ دالتان عدديتان معرفتان كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = x$

[1 ن] ❶ عيّن $D_f$ و $D_g$ مجموعة تعريف كل من الدالتين $f$ و $g$ على الترتيب

[2 ن] ❷ تحقق أن $(f \circ f)(x) = g(x)$، ثم استنتج $(f \circ f \circ f)(2)$.

II) $(C_f)$ هو التمثيل البياني للدالة $f$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

[2 ن] ❶ من أجل كل $x \neq 1$، عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$، بحيث:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1}$$

[2 ن] ❷ فكك الدالة $f$ إلى مركب دالتين $u$ و $v$ بسيطتين، يطلب تعيين عبارتيهما.

[1 ن] ❸ باستعمال اتجاه تغير مركب دالتين، بيّن أن الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$

[1 ن] ❹ من أجل $(2 - x) \in \mathbb{R}^*$، تحقق من أن النقطة $\omega(1; 1)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$

[2 ن] ❺ استنتج أنه يمكن رسم $(C_f)$ انطلاقا من دالة مرجعية، ثم أنشئه

يقول أحمد شوقي:

وما أخذ العلم بالتمني

ولكن تؤخذ الدنيا غلابا

ثانوية: المجاهد صديقي نوري | فرض الفصل الأول | الموسم الدراسي: 2021 / 2022

المستوى: 2 ثانوي - شعبة رياضيات | [تصحيح نموذجي مقترح] | الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

## ◆ التمرين 01: [06 نقاط]

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$ :

لدينا: $2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$

نضع: $x^2 = t$ (0.5)

نجد: $2t^2 - 2t - 4 = 0$

باستعمال المميز المختصر لدينا:

$$\begin{aligned}\Delta &= b' - ac\\ &= (-1)^2 - (2)(-4)\\ &= 9\end{aligned}$$

لدينا:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

ومنه:

$$x = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = 2 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = -1$$

لدينا: $x^2 = t$

ومنه: $x^2 = -1$ (مرفوض) أو $x^2 = 2$ (مقبول)

ومنه: $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2} =$

إذن: $s = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ (0.5)

❷ تعيين درجة كثير الحدود $P$:

$$\begin{aligned}P(x) &= -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2)\\ &= -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x^5 - 2x^3 - 4x\end{aligned}$$

إذن درجة $P(x)$ هي 5 (1)

• تبيين أنّ $\alpha$ جذر لـ $P(x)$:

$$\begin{aligned}P(\alpha) &= -2\alpha(\alpha^4 - x^2 - 2) + 2\alpha(\alpha^4 - \alpha^2 - 2)\\ &= 0\end{aligned}$$ (1)

❸ تبيين أنّ: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$:

لدينا: $\alpha$ جذر لـ $P(x)$ و $P(x)$ من الدرجة 5 ومنه:

$$P(x) = (x - \alpha)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}P(x) &= -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2)\\ &= -2\alpha x^4 + 2\alpha x^2 + 4\alpha + 2x^5 - 2x^3 - 4x\\ &= 2x^5 - 2\alpha x^4 - 2x^3 + 2\alpha x^2 - 4x + 4\alpha\end{aligned}$$ (0.5)

باستعمال التحليل او المطابقة أو القسمة الاقليدية أو جدول هورنر:

لدينا:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | $-2\alpha$ | $-2$ | $2\alpha$ | $-4$ | $4\alpha$ |
| $a$ | 0 | $2a$ | 0 | $-2\alpha$ | 0 | $-4\alpha$ |
| | 2 | 0 | $-2$ | 0 | $-4$ | 0 |

نجد: $P(x) = (x - \alpha)(2x^4 - 2x^2 - 4)$ (0.5)

إذن: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

• استنتاج حلول المعادلة $P(x) = 0$:

لدينا: $P(x) = 0$

معناه: $(x - \alpha)Q(x) = 0$

ومنه: $x - \alpha = 0$ أو $Q(x) = 0$

إذن: $s = \{\alpha; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ (1)

❹ استنتج حلول المعادلة $P(|x| - 1) = 0$

لدينا: $P(|x| + 1) = 0$

معناه:

$$|x| + 1 = \begin{cases}\alpha\\ -\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{cases}$$ (0.5)

ومنه:

$$|x| = \begin{cases}\alpha - 1\\ -\sqrt{2} - 1 \quad (\text{مرفوض})\\ \sqrt{2} - 1\end{cases}$$

ومنه:

$$x = \begin{cases}\alpha - 1\\ -\alpha + 1\\ \sqrt{2} - 1\\ 1 - \sqrt{2}\end{cases}$$ (0.5)

إذن: $s = \{(1 - \sqrt{2}); (\sqrt{2} - 1); (\alpha - 1); (1 - \alpha)\}$

## ◆ التمرين 02: [03 نقاط]

❶ حساب $(f \circ f \circ f)(2)$:

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(2) &= (f \circ f)(f(2))\\ &= (f \circ f)(5)\\ &= f(f(5))\\ &= f(-1)\\ &= 2\end{aligned}$$ (0.5)

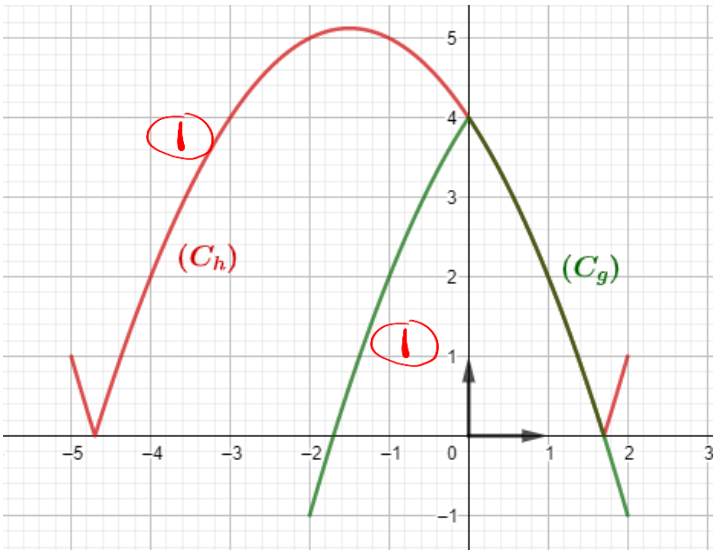
• استنتاج $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{2021 مرة}}\right)(2)$:

لدينا: $2021 = 2 + \underbrace{673 \times 3}_{2019}$

إذن:

$$\begin{aligned}\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{2021 مرة}}\right)(2) &= \left(\underbrace{f \circ f}_{\text{2 مرة}} \circ \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{2019 مرة}}\right)(2)\\ &= (f \circ f)(2)\\ &= f(f(2))\\ &= f(5)\\ &= -1\end{aligned}$$ (0.5)

❷ إنشاء $(C_g)$ و $(C_h)$:




◆ **التمرين 03:** [11 نقطة]

**I)**

❶ تعيين $D_f$ و $D_g$:

الدالة $f$ معرفة لما $x-1 \neq 0$

ومنه $x \neq 1$

إذن: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ 0.5

ولدينا الدالة $g$ دالة تآلفية

إذن: $D_g = \mathbb{R}$ 0.5

❷ التحقق أن $(f \circ f)(x) = g(x)$:

$$(f \circ f)(x) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{1} = x$$

• استنتاج $(f \circ f \circ f)(2)$:

$$(f \circ f \circ f)(2) = (f \circ f)(f(2))$$
$$= g(2)$$
$$= 2$$

**II)**

❶ تعيين العددين الحقيقين $a$ و $b$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1}$$
$$= \frac{ax - a + b}{x-1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

إذن: $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

❷ تفكيك الدالة $f$ إلى مركب دالتين $u$ و $v$ :

نضع: $f(x) = (u \circ v)(x)$

حيث: $\begin{cases} u(x) = 1 + \frac{1}{x} \\ v(x) = x - 1 \end{cases}$

❸ تبيين أن الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$

لدينا:

• الدالة $u$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$ لأنها عبارة عن دالة مرجعية (الدالة مقلوب) زائد 1

• الدالة $v$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأنها دالة تآلفية معامل توجيها موجب

بما أن الدالة $u$ و $v$ متعاكستين في اتجاه التغير

فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$.

❹ التحقق من أن النقطة $\omega(1;1)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$:

لدينا $(2-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$f(2-x) + f(x) = 1 + \frac{1}{2-x-1} + 1 + \frac{1}{x-1}$$
$$= 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1}$$
$$= 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$
$$= 2$$

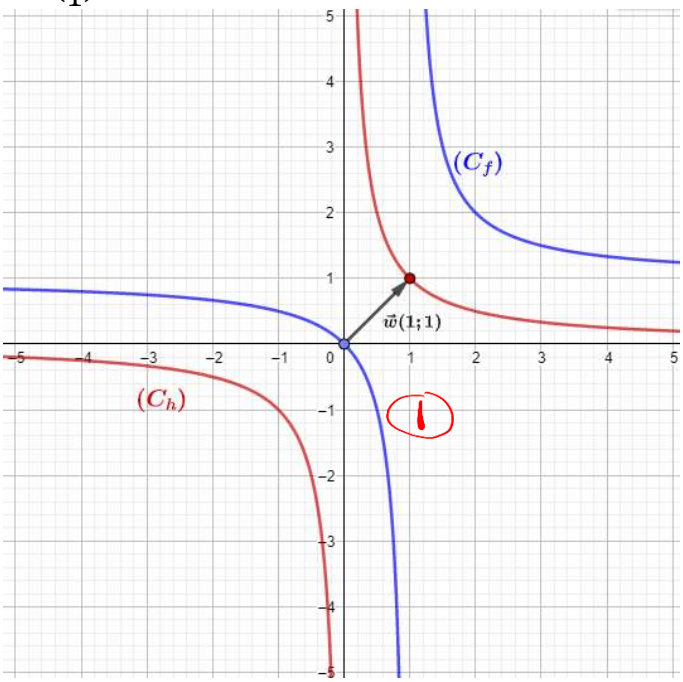
إذن $\omega$ مركز تناظر لـ $(C_f)$.

❺ استنتج أنه يمكن رسم $(C_f)$ انطلاقا من دالة مرجعية:

نضع:

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

لدينا:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = h(x-1) + 1$$

إذن $(C_f)$ هو صورة منحنى الدالة جذر بانسحاب شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$