

الموسم الدراسي: 1445 هـ / 23 - 2024 م

البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات
للسنة الثالثة ثانوي شعبة رياضيات
أستاذ المادة: مزروح يوسف



المدة: 4 ساعات ونصف

التاريخ: 2024/05/13

على المترشح إختيار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

تكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$ في الشكل المقابل المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ والمنصف الأول ذي المعادلة $y = x$

1 (أ) أعد رسم الشكل ثم مثل الحدود $u_0 ; u_1 ; u_2$

(ب) ماهو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leq 6$

3 تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

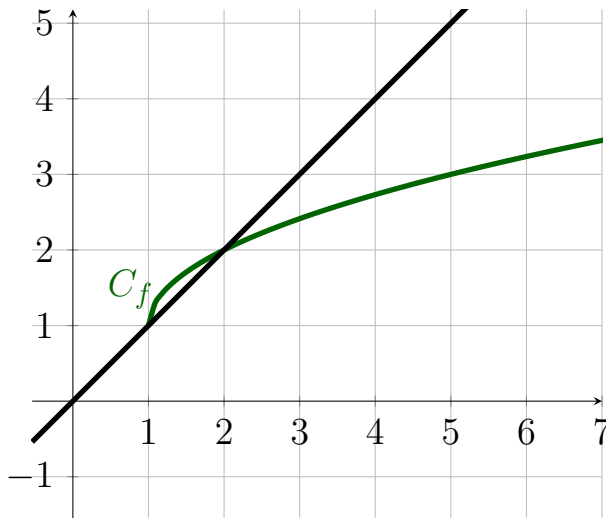
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 1}(1 - \sqrt{u_n - 1})$$

4 إستنتج أن (u_n) متناقصة ثم بين انها متقاربة وعين نهايتها.

5 (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$$

(ب) إستنتج أن $0 \leq u_n - 2 \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم عين نهاية (u_n)



التمرين الثاني: 05 نقاط

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $D; C; B; A$

حيث : $z_A = 1$ ، $z_B = 4 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ و $z_D = 5$

1 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z $(\bar{z} - 1)(\bar{z}^2 - 8\bar{z} + 19) = 0$

$$(2) \quad (1) \text{ عين قيم العدد الطبيعي } n \text{ حتى يكون } (z_A - z_B)^n \text{ عددا تخيليا صرفا جزؤه التخيلي سالب}$$

(ب) عين طبيعة المثلث ABC

3 (١) أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي ثم إستنتج أن A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره.

(ب) عين قمرية والعدس الخفيري الدائرة التي يحيطون بالمثلث $\triangle ACD$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \alpha \overrightarrow{AO}$$

(ب) إستنتج مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MD}||=||\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}||$

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر المعادلة $2024x - 1445y = 289 \dots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

1 بين أن $x \equiv 0 \pmod{17^2}$

2 عين الحل الخاص والذي يحقق $y_0 - x_0 = 463$ ثم إستنتج حلول المعادلة (E)

3 إستانج قيم الأعداد الصحيحة α والتي تحقق الجملة :

$$\begin{cases} \alpha \equiv -149 [2024] \\ \alpha \equiv 140 [1445] \end{cases}$$

4 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

5 عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^{4x} + 5^y \equiv 3 \pmod{7}$

التمرين الرابع: 07 نقاط

-I g_m دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g_m(x) = m(e^x + e^{-x}) - 2m + 1$ حيث m عدد حقيقي غير معدوم.

1 أدرس إتجاه تغير الدالة g_m . (ناقش حسب قيم m)

2 أحسب $g_m(0)$ ثم إستنتج إشارة $g_m(x)$. (في حالة $m > 0$ فقط)

-II f_m دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $f_m(x) = \frac{mxe^x - mx - 1}{e^x - 1}$ في بقية التمرين نفرض $m > 0$
(C_m) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب نهايات الدالة f_m عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 (أ) بين أن $f'_m(x) = \frac{e^x \times g_m(x)}{(e^x - 1)^2}$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f_m .

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f_m

3 (أ) بين أن المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx$ مقارب مائل لـ (C_m) بجوار $+\infty$.

(ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_m) و (Δ_m)

(ج) بين أن المستقيم (Δ'_m) ذو المعادلة $y = mx + 1$ مقارب مائل لـ (C_m) بجوار $-\infty$.

4 بين أن $f_m(-x) + f_m(x) = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5 (أ) ارسم (Δ_2) ، (Δ'_2) و (C_2) . (يعطى $f(0,6)^2 + f(-0,86)^2 = 0$)

(ب) بين أن جميع المستقيمات ذي المعادلات $y = nx + \frac{1}{2}$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها. حيث $(n \in \mathbb{R})$

(ج) ناقش بياننا وحسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة $f_2(x) = nx + \frac{1}{2}$

6 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f_m(x) = mx - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

(ب) S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_m) و (Δ_m) والمستقيمت $x = 1$ و $x = 2$

بين أنه مهما تغير m فإن المساحة S ثابتة وتساوي $S = (\ln(e+1) - 1)u.a$

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 05 نقاط

I- يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات سوداء، كل الكرات متجانسة لانفرق بينها باللمس. ن سحب من الكيس n كرة على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة بعد كل سحبة ($n \geq 2$)
نعتبر الحوادث التالية :

A : "الحصول على كرات من نفس اللون" B : "الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط"
 C : "الحصول على كرات من اللونين" D : "الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأكثر"

1 أحسب $P(A)$ و $P(B)$

2 بين أن $P(C) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ و $P(C \cap D) = \frac{n}{2^n}$ و $P(D) = \frac{n+1}{2^n}$

3 بين أن الحدان C و D مستقلان تكافئ $2^{n-1} = n+1$

II- نريد تعيين قيم n حتى يكون الحدان C و D مستقلان
نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln 2 - \ln(\ln(2))}{2^x - 1} - (x+1)$

1 بين أن f متزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{\ln 2}; +\infty \right[$ ومتناقصة تماما على $\left[0; \frac{\ln 2 - \ln(\ln(2))}{\ln 2} \right]$

2 شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أحسب $f(3)$

3 إستنتج قيمة n حتى يكون الحدان C و D مستقلان

III- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$

بين أن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 2^n - \frac{n^2 + 3n + 3}{2}$

التمرين الثاني: 04 نقاط

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $F; B; A$

حيث: $z_A = 1 - i$ ، $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ ، و $z_F = \frac{z_B}{z_A}$

1 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ الجملة: $\begin{cases} (1+i)z_1 - z_2 = -(\sqrt{3} + i) \\ \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

2 (أ) اكتب z_A على الشكل الأسّي

(ب) بين أن : $z_F = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم إستنتج الشكل الأسّي لـ z_B

(ج) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة $(z_F)^n$ تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2024$

3 (أ) اوجد لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

(ب) أحسب مساحة الدائرة (λ) ذات القطر $[BB']$

(ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

4 عين مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

التمرين الثالث: 04 نقاط

1 (أ) حلل كل من 1672 و 2024 إلى جداء عوامل أولية.

(ب) عين الأعداد الطبيعية n والتي تحقق $n^2 + 2n + 10 \equiv 0[n + 1]$

(ج) عين القيم الممكنة لـ $\text{pgcd}(n^2 + 2n + 10; n + 1)$

(د) إستنتج قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\text{pgcd}(n^2 + 2n + 10; n + 1) = 3$

2 a, b و c أعداد طبيعية غير معدومة، حيث a اولي مع كل من b و c .

(أ) بإستعمال مبرهنة بيزو بين أن $\text{pgcd}(a; bc) = 1$

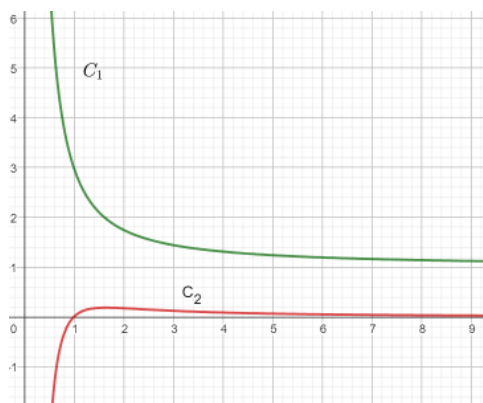
(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ($n \geq 1$) فإن $\text{pgcd}(a; b^n) = 1$

(ج) إستنتج $\text{pgcd}(2024^{1672}; 1672^{2024})$

التمرين الرابع: 07 نقاط

-I h و w دالتان معرفتان على المجال $]0; +\infty[$ بـ $h(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ و $w(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

تمثيلهما البياني في الشكل المقابل.



1 أنسب كل دالة لمنحنائها مع التعليل .

2 g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{-\ln x + x^2 + x + 1}{x^2}$ ، إستنتج إشارة $g(x)$

-II f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \ln x + x + 1$ $2cm$ وحدة الطول (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1 أحسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أن $f'(x) = g(x)$

3 أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4 بين أن المعادلة $x + \ln x = 0$ تقبل حل وحيد α يحقق $0.56 < \alpha < 0.57$

5 انشئ (C_f)

6 تحقق أن $f(x) = (\ln x + x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ ثم عين الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم عند 1

7 S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمت $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$

بين أن $S = 2e(e + 2)cm^2$

8 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \frac{1}{2} \int_1^n \left[\frac{f(x)}{\ln x + x} - 1 \right] dx$$

(أ) بين أن u_n متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

(ب) بين أن $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \ln \sqrt{n}!$

إنتهى الموضوع الثاني