



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = 3$ و $3u_{n+1} - u_n = 12$

(1) أثبت بالتراجع أن من كل عدد طبيعي غير معدوم $n : u_n < 6$

(2) استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .

(3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $V_n = u_n - 6$

(أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، ثم اكتب u_n بدلالة n .

(ب) بين أن (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(د) احسب قيمة الجداء P حيث : $P = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{100}$

التمرين الثاني :

(1) أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $8x - 5y = 3$
ب- ليكن m عددا صحيحا ولتكن الثنائية $(p ; q)$ من الأعداد الصحيحة حيث : $m = 5q + 4$ و $m = 5p + 1$

■ بين أن الثنائية $(p ; q)$ حل للمعادلة (E) و استنتج أن : $m \equiv 0[9]$
ج - أوجد أصغر عدد صحيح m أكبر من أو يساوي 2000.

(2) أ- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي k فإن : $2^{3k} \equiv 1[7]$
ب- أوجد باقي قسمة العدد 2^{2021} على 7.

(3) ليكن a و b عددان طبيعيين كلا منهما أقل أو يساوي 9 حيث $a \neq 0$ ، نعتبر العدد الطبيعي N المكتوب بالشكل : $N = \overline{a00b}$ في النظام العشري .

(أ) تحقق أن $10^3 \equiv -1[7]$

(ب) استنتج كل الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث :

كيس يحتوي على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 1,1,2,2,3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 3,2,-3 وكريه بيضاء مرقمة بـ : -1
نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " ، C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

أ. عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

ب. احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير X و التباين $V(X)$.

ت. احسب احتمال الحادثة : $\langle\langle X^2 - X > 0 \rangle\rangle$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و

$$y = x + 1$$

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من (Δ) و (Δ') .

(4) أثبت أن النقطة $w(0, \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أ- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما على الترتيب α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,3 < \beta < -1,4$

ب- هل توجد مماسات لـ : (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج- ارسم كل من (Δ) و (Δ') و المنحنى (C_f) ؟

د- ناقش بيانيا حسب قيمة الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(m - 1)e^{-x} = m$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 5.
- (2) u_0 و r عدنان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r .
أ. عين u_0 و r علما أن : u_0 و r أوليان فيما بينهما و $u_0^2 = u_{10} - u_1$
- (3) نفرض أن : $u_0 = 3$ و $r = 1$: نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$
أ. أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n .
- ب. عين العدد الطبيعي q حيث : $2P_q = (2010)!$ ، ثم تحقق أن : $3^q \equiv 2[5]$
- ت. عين العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 2 \equiv 3^q[5]$

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

- (1) أ- أنشئ في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ كل من المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ و المنحنى (C) الممثل للدالة f ، المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \sqrt{x+2}$
ب- أنشئ على محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها، مع إبراز خطوط الرسم .
ج - ما تخمينك حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) ؟
- (2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq 2$
ب- بين أن (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .
ج - بين أن النهاية ℓ للمتتالية (u_n) تحقق : $\ell \geq 2$ و $\ell = \sqrt{\ell + 2}$
د- استنتج قيمة ℓ .

التمرين الثالث :

- I. C_1 و C_2 حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب C_1 الأعداد :
 $0, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ وتحمل أوجه المكعب C_2 الأعداد : $0, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
- نرمي الحجرين في آن واحد و نسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ : C_1 و C_2 حيث نرمز لهذين العددين بـ α و β .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha + \beta)$

- (1) ما هي القيم الممكنة للمتغير X ، (يمكن تنظيم النتائج في جدول) .
- (2) عرف قانون احتمال المتغير X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و الإنحراف المعياري $\sigma(X)$

- II. نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص $100 DA$ عندما نرمي حجري النرد ويتحصل على $\sin(\alpha + \beta) = 1$ أو $\sin(\alpha + \beta) = -1$ ، و يخسر $50 DA$ في باقي الحالات .
وليكن y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .
(1) عين قانون احتمال المتغير y .
(2) نرمي حجري النرد 5 مرات ، ما احتمال أن يربح اللاعب ثلاث مرات ؟ .

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ- أحسب نهايات الدالة f
ب- أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .
- (2) أ- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $y = x$: (D)
ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) .
- (3) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $1,3 < x_0 < 1,4$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.
ب- عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب .
- ج - أنشئ (Δ) و (C_f) .

- (4) نعرف على المجال $]-1; +\infty[$ الدالة g ب : $g(x) = |f(x)|$ و (C_g) بيانها في المعلم السابق .
■ اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_g) ثم أرسمه في المعلم السابق .
- (5) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = m^2$.

أستاذ المادة يتمنى لكم التوفيق والسداد في شهادة البكالوريا

انتهى الموضوع الثاني